

Lösungen zum Problem der Drift bei der Massebestimmung durch Substitutionswägung

Von dem Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung der Würde eines
Dr.-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)
genehmigte
D i s s e r t a t i o n

von
Dipl.-Phys. Arend Helms

aus
Bremen

1. Berichterstatter: Prof. a.D. Dr. Klaus Bethe
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Manfred Kochsiek
eingereicht am: 25.04.2005
mündliche Prüfung (Disputation) am: 18.11.2005

2005

Inhalt

	Kurzfassung	
	Abstract	
	Symbolverzeichnis	
	Begriffe	
1	Einleitung	1
2	Wägleichungen	11
2.1	Grundgleichung	11
2.2	Wägleichungssystem	14
3	Vorlastgleichungen	17
3.1	Waagendrift	17
3.2	Driftgleichungssystem	18
3.3	Driftmodelle	22
3.3.1	Durchgehend konstante Drift	22
3.3.2	Zyklen über je 3 Messpunkte	23
3.3.3	Unabhängige Zyklen über je 4 Messpunkte	23
4	Konventionelle Substitutionsmethoden	25
4.1	Einfachsubstitution	25
4.2	Gewichtung von Einfachsubstitutionsfolgen	28
4.3	Doppelsubstitution	30
4.4	Verallgemeinerte Substitutionsprozeduren bei zwei Objekten	31
4.5	Beste Gewichtung von Substitutionszyklen	34
4.5.1	Beispiel Einfachsubstitution	36
5	Lösung der Gleichungssysteme	39
5.1	Unfreie Driftänderungen	39
5.1.1	Schritte zur Berechnung der Massewerte	42
5.2	Beispiele - unfreie Driftänderungen	47
5.2.1	Durchgehend konstante Drift	47
5.2.2	Über je drei Messpunkte partiell konstante Drift	49
5.2.3	Gewichtung von Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution	50
5.2.4	Gewichtung von Wägungen bei der Einfachsubstitution	51
5.2.5	Über je vier Messpunkte partiell lineare Drift	54
5.2.6	Driftmodelle	55
5.3	Freie Driftänderungen (LDA-Modell)	56
5.3.1	Schritte zur Berechnung der Massewerte	62
5.4	Eigenschaften der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix	70
5.4.1	Zeile 1 und Spalte 1 der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix	70
5.4.2	Spaltenvergleich zwischen der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix	71
5.4.3	Summation von Zeilen-Komponenten der Lösungsmatrix	71
5.4.4	Letzte Spalte der Lösungsmatrix	72
5.4.5	Nullelemente der letzten Spalte der Lösungsmatrix	74
5.4.6	Freie Driftänderungen: Nullmatrix mit n_0 Zeilen	75
5.4.7	Letzte Zeile der Lösungsmatrix	76
5.4.8	Multiplikation mit der Wägematrix	77
5.4.9	Darstellung der einzelnen Komponenten durch Brüche	79
5.4.10	Summierung der nach Vorzeichen selektierten Komponenten	80
5.4.11	Mehrfachprodukte mit der Lösungsmatrix	80

5.5	Beispiel zum Modell freier Driftänderungen	81
5.6	Approximationen	84
5.6.1	Konstante Luftdichte	84
5.6.2	Auftriebskorrektur an den Wägewerten	86
5.6.3	Beispiel: 2 Objekte	86
6	Unsicherheitsberechnungen	89
6.1	Typ A - Unsicherheiten der Lösungen der Wägegleichungen	89
6.2	Bestimmung des statistische Freiheitsgrades	95
6.3	Mit dem Auftrieb verbundene Unsicherheiten des erweiterten Massevektors	97
6.3.1	Mit dem Auftrieb verbundene Differentialformen	97
6.3.2	Typ A - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten	101
6.3.3	Typ B - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten	101
6.3.4	Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Materialdichten	102
6.4	Näherungsformeln für mit dem Auftrieb verbundene Varianzen und Kovarianzen	103
6.4.1	Typ A - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten	103
6.4.2	Systematische Abweichungen der Luftdichte	103
6.4.3	Einfluss der Materialdichte	104
6.4.4	Beispiele zur Einfachsubstitution	105
6.5	Mit dem Normal assoziierte Unsicherheiten	106
6.6	Typ A – Unsicherheit von Massedifferenzen	107
6.6.1	Schätzung auf der Basis der Wägewerte	107
6.6.2	Schätzung auf der Basis von Wägewertdifferenzen	108
7	Spezielle Anwendungsmöglichkeiten	111
7.1	Unfreie, nicht verschwindende Driftänderungen	111
7.2	Bestimmung von Komparatorkoeffizienten	114
7.2.1	Grundlagen	114
7.2.2	Hinweise zum Verfahren	116
8	Anwendungsbeispiel: Untersuchung von Wägeereignissen	117
8.1	Aufgabenstellung und Methode	117
8.2	Messungen und Auswertung	118
9	Anhang	123
9.1	Beispiele zu den unfreien, verschwindenden Driftänderungen	123
9.1.1	Einfachsubstitution, durchgängige Driftkonstanz bei 2 Objekten	123
9.1.2	Doppelsubstitution, durchgängige Driftkonstanz bei 2 Objekten	128
9.1.3	Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen bei 2 Objekten	130
9.1.4	Doppelsubstitution mit unabhängigen Zyklen bei 2 Objekten	134
9.1.5	Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen und Gewichtung	136
9.1.6	Gewichtung von Wägewertdifferenzen	138
9.1.7	Gewichtung von Wägewerten	139
9.2	Beispiele zu den freien, verschwindenden Driftänderungen	142
9.2.1	Freies lineares Driftmodell mit einem Zyklus	142
9.2.2	Durchgehend lineares Driftmodell	144
9.3	Beispiele zu den konventionellen Substitutionsmethoden	148
9.3.1	Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen bei 2 Objekten	148
9.3.2	Kombinierte Substitution mit aneinander anschließenden Zyklen	151
	Literatur	153

Kurzfassung

Hoch genaue Massebestimmung, zum Beispiel von Massennormalen, erfolgt durch Massevergleich im Schwerfeld mit Waagen besonders hoher Auflösung. Da es sich um Vergleichsmessungen handelt, erhält man als Ergebnis Massedifferenzen. Eines der an den Wägungen beteiligten Objekte ist das Bezugsnormal. Hinsichtlich seines Massewertes und der zugehörigen Unsicherheit ist es bekannt. Ziel der Messungen ist es, die Massewerte und Unsicherheiten der übrigen Objekte aus den Ergebnissen der Differenzwägungen zu ermitteln. Aufgrund der geringen relativen Messunsicherheiten bis zu 10^{-9} besteht die Notwendigkeit, die Auswirkungen der verschiedensten, nur teilweise direkt erfassbaren Einflussparameter zu eliminieren. Dies erfolgt nach dem Verfahren der Substitutionswägung. Das Verfahren besagt, dass die Prüflinge und das Bezugsnormal in bestimmten Abläufen auf derselben Waage wechselnd gewogen, also substituiert werden.

Schon die herkömmlichen Verfahren der Substitutionswägung hatten ihre Bedeutung darin, zeitliche Änderungen der an den Wägungen beteiligten physikalischen Größen zu eliminieren. Dabei ist man von der Vorstellung ausgegangen, dass sich die Wägewerte für gleiche Objekte zeitlich linear weiter entwickeln. Für eine Wägereihe, die aus aufeinander folgenden Wägezyklen besteht, hat man je Wägezyklus mittlere Wägewertdifferenzen gebildet. Aus der Gesamtheit aller Zyklen hat man schließlich einen Mittelwert und eine Standardabweichung berechnet. Wie auch andere Autoren bereits festgestellt haben, war dies Verfahren nur dann statistisch vertretbar, wenn die Zyklen nicht korrelieren. Für den Fall korrelierter Zyklen wurden Korrekturen zur korrekten Berechnung der Standardabweichung hergeleitet. Die bei der Massebestimmung erforderliche Auftriebskorrektur hat man entweder je Zyklus oder erst nach der Mittelwertbildung durchgeführt. Zur Verfeinerung dieser Messmethoden sind Arbeiten anderer Autoren zu erwähnen, bei denen nichtlineare Verläufe durch Überlagerung parabolischer und kubischer Funktionen nachgebildet wurden.

In der vorliegenden Arbeit wird von einem anderen Ansatz ausgegangen. Die zeitlich sich ändernden Einflüsse werden danach unterschieden, ob es sich um Veränderungen der Auftriebskräfte an den Messobjekten oder um eine Drift der Wägeeinrichtung handelt. Letztere wird durch einen zeitlich veränderlichen Vorlastwert dargestellt. Auf der Grundlage dieser Vorstellung wird ein Gleichungssystem entwickelt, das die Gesamtheit aller Wägeereignisse umfasst. Bei jeder Wägung wird simultan der Auftrieb am Objekt berücksichtigt. Dadurch können durch Messung der Luftdichteparameter je Wägung die Auftriebskräfte an den Objekten eliminiert werden. Da man den Verlauf der Vorlastwerte durch gesonderte Messungen nicht erfassen kann, werden für sie Driftmodelle formuliert. Das Wägeggleichungssystem wird dem Modell entsprechend erweitert und schließlich einer Lösung zugeführt. Durch dieses neuartige Verfahren wird es nun möglich, Substitutionswägungen für beliebige Wägeschemata zu realisieren. Die bisher üblichen Verfahren der Einfach- und Doppelsubstitution stellen nur einen Spezialfall dar. Dabei ist stets sichergestellt, dass für die Wägewertabweichungen das Prinzip der geringsten Quadrate eingehalten wird.

Zwei Driftmodelle werden in dieser Arbeit eingeführt:

Das LD – Modell (**L**east **D**eviations) ist eine Weiterentwicklung der bisher verwendeten Verfahren der Einfach- und Doppelsubstitution. Wie bisher wird die Drift für jeden der aneinander gereihten Wägezyklen als konstant angesetzt. Jetzt werden aber auch mit dem hier entwickelten Gleichungssystem die Vorlastwerte bestimmt. Je nach den Festlegungen im Modell ist eine weitgehend gute Anpassung des Verlaufs der Vorlastwerte an den Erwartungsverlauf möglich. In einem Vergleich zwischen den neuen und den herkömmlichen Kalibrierformeln zeigt sich, dass im Falle korrelierter Zyklen wie zum Beispiel bei der Einfachsubstitution die im Mess- und Eichwesen übliche Praxis der Auswertung der Wägeergebnisse durch arithmetische Mittelwertbildung aus statistischen Gründen zu verwerfen ist. Ein System jetzt korrekter Kalibrierformeln wird hergeleitet.

Das LDA – Modell (**L**east **D**rift **A**lterations) stellt eine Erweiterung des LD – Modells dar. In diesem Modell sind Abweichungen von der Linearität nach dem Prinzip der geringsten Quadrate der Driftänderungen zugelassen. Das Modell eröffnet die Möglichkeit, unabhängig vom Umfang der Messungen den Verlauf der Vorlastwerte von zufälligen Schwankungen zu bereinigen. Mit dieser neuen Methode kann man bei hoch genauen Waagen das Driftverhalten der Baugruppe Wägeeinrichtung untersuchen. Da außerdem das Prinzip der geringsten Quadrate der Wägewertabweichungen auf der Basis aller einzelnen Wägungen eingehalten wird, ergeben sich neue Möglichkeiten, systematische Abweichungen der Wägewerte mit statistischen Mitteln aufzuspüren.

Abstract

For high precise mass determination for example in case of mass standard calibration particular high resolution balances are used in the gravity field to carry out mass comparisons. As the measurements are based on comparisons the results are mass differences. One of the objects participating to the weighing is the reference standard. Concerning its mass value and the related uncertainty it is considered as known. The objective of the measurements is the determination of the mass values and uncertainties of the other objects on the base of differential weighing results. Because of relative measurement uncertainties down to 10^{-9} it is necessary to eliminate the impact of influence parameters especially when they are not all accessible through direct measurement. For this purpose substitution weighing procedures are applied. In these procedures the objects and the reference standard are interchanged that means substituted during weighing in particular patterns.

Commonly traditional substitution weighing has essentially contributed to the elimination of time dependent physical impacts of weighing parameters. Generally it has been assumed that the weighing values relating to the same object progress by time in linear steps. Weighing sequences comprising subsequent weighing cycles have provided average cycle weighing differences as a measure for mass differences. Finally for all cycles the average and the standard deviation have been calculated. Other authors have already stated that this method would only be acceptable as long as the cycles are not correlated. In case of correlation for the determination of the standard deviation corrections have been formulated. The buoyancy corrections that generally need to be applied have been carried out after the process of averaging either per cycle or after all cycles. Other authors should be mentioned that have improved these methods more precisely through allowing a linear characteristics to be superposed by a parabolic and cubic term.

The work presented here is based on a different approach. Now the influence parameters that change by time are differently specified depending on whether they relate to variations of the effect of buoyancy on the measurement objects or to the drift of the weighing cell. The drift is expressed in form of a preload value that can vary by time. On the base of this concept a system of equation is established that covers the total of all weighing events. For every weighing event simultaneously the effect of buoyancy on the actual object is taken into account. Thus it is possible through measurement of the air density parameters to eliminate the buoyancy force on the objects directly at the instant of weighing. Due to the fact that the preload values cannot be measured independently they are treated in form of drift models. This leads to an expansion of the weighing equation system and finally to a mathematical solution. By this new method it has become possible to realise substitution weighing in any form of weighing scheme. The common single and double substitution patterns have become special cases of this general concept. In any case it is ensured that the weighing value deviations are in accordance with the least square principle.

Two different types of drift models are introduced:

The LD – model (**L**east **D**eviations) represents a further development of the commonly applied single and double substitution procedure. As before, for all consecutive weighing cycles the drift is treated exactly constant. But through the above mentioned weighing equations now it has become possible, also to determine the preload values. According to the detailed specification of the model the progress of the preload values fits well to the expected characteristics. Comparing the calibration formulas received through the least square principle with those commonly in use at weights and measures authorities a statistical discrepancy has appeared. In case of correlated cycles as for example single substitution the arithmetic averaging of cycle weighing results violates principles of statistics. A system of corrected calibration formulas is presented in this work.

The LDA – model (**L**east **D**rift **A**lterations) is a further developed LD – model. In this model deviations from constant drift are permitted following the least square principle that is applied to a variable drift. By this model it is possible to separate random variations of preload values from those that are steadily progressing by time. There is no restriction on the sample size. Following this concept there is a possibility to examine the weighing cell devices of high resolution balances regarding their drift parameters. As also the least square principle is taken into account for the weighing value deviations there are new methods by statistical means searching for systematic weighing value deviations.

Symbolverzeichnis

0	Nullmatrix
1	Matrix mit Elementen 1
α	Variabler Gewichtungsvektor der Wägewertdifferenzen von Zyklen
a	Inhomogenität bei Vektoridentität von Massevektoren im Falle von LDA
A	Teilmatrix der expandierten Normalmatrix (ohne äußere Zeilen und Spalten)
B	Matrix zur Erzeugung von Massedifferenzen
c	Koeffizientenvektor einer Wägeeinrichtung
C_A	Typ A - Kovarianzmatrix
c_h	Relative Feuchte – Koeffizient einer Wägeeinrichtung
C_k	Dichtekorrelationsmatrix einer Dichtegruppe
c_p	Bezugsvektor für Vorlastwerte
c_t	Temperatur-Koeffizient einer Wägeeinrichtung
c_{p_a}	Luftdichte-Koeffizient einer Wägeeinrichtung
D	Driftmatrix
D(...)	Diagonalmatrix aus Vektor
d	Diagonalenvektor im Vektorraum mit Elementen 1
d	Nenner der Lösungsmatrix
e	Abweichung des Wägewertes vom Erwartungswert
<e>	Justierte Abweichung des Wägewertes, Residuum
e	Vektor der Abweichungen der Wägewerte von den Erwartungswerten
<e>	Vektor der justierten Wägewertabweichungen, Residuen
E	Driftänderungsvektor
<E>	Vektor der justierten Driftabweichungen, Residuen
e	Tiefgestellter Index für „Expandiert“
E₀	Unfreier Anteil des Driftänderungsvektors
E_i	Komponente des Driftänderungsvektors
F	Lagrange - Funktion
f	Statistischer Freiheitsgrad
G	Lagrange - Funktion
h	Relative Feuchte
h₀	Vektor der relativen Bezugsfeuchte
i	Zähler der Wägewerte (in der Regel)
I	Einheitsmatrix
I_z	Um Nullspalte erweiterte Einheitsmatrix
j	Zähler der Objekte (in der Regel)
k	Zähler der Beobachtungszeiträume
L	Lagrange - Funktion
h_z	Lösungsvektor
m	Masse
m	Massevektor
M	Erweiterter Massevektor
m_a	Last
m_a	Lastvektor
M_a	Erweiterter Lastvektor
m_{ai}	Komponente des Lastvektors
m_{aR}	Last erzeugt vom Bezugsnormal
M_e	Expandierter Massevektor
m_j	Komponente des Massevektors
m_w	Nominales Arbeitsniveau einer Komparatorwaage
m_n	Nominaler Massewert
m_N	Masse des Normals
m_p	Vorlastwert
m_p	Driftwert
m_p	Vorlastwertvektor
m_P	Masse des zu kalibrierenden Objektes (Prüflings)
m_{p0}	Bezugsvorlastwertvektor
m_{pi}	Komponente des Vorlastwertvektors

m_R	Masse des Bezugsnormals
\mathbf{N}	Zählermatrix der Lösungsmatrix
n_d	Anzahl der linearen Driftgleichungen
n_o	Anzahl der Objekte
n_t	Anzahl der Beobachtungszeiträume
n_w	Anzahl der Wägewerte
n_z	Anzahl der Wägezyklen
n_{zj}	Anzahl der Driftgleichungen eines Zyklus
s	Standardabweichung
\mathbf{S}	Lösungsmatrix
\mathbf{S}_0	Lösungsmatrix bei Luftdichte Null
\mathbf{S}_2	Vektor aus Lösungsmatrix, Objekt 2
t	Zeit
T	Temperatur
T	Hochgestellter Index für „Transponiert“
t_0	Anfangszeitpunkt
\mathbf{t}_0	Vektor der Bezugstemperatur
t_1	Endzeitpunkt
u	Standardunsicherheit
\mathbf{v}	Volumenvektor
\mathbf{V}	Kovarianzmatrix
\mathbf{W}	Gewichtungsmatrix
\mathbf{W}_d	Gewichtungsmatrix
w_{dk}	Diagonalelement der Gewichtungsmatrix
\mathbf{W}_S	Wägewert – Multiplikator (Matrix)
\mathbf{w}_z	Bester Gewichtungsvektor
\mathbf{w}_{ze}	Expandierter Gewichtungsvektor
\mathbf{X}	Wägematrix
\mathbf{X}	Gewichtete Wägematrix
\mathbf{X}_0	Wägematrix bei Luftdichte Null
\mathbf{X}_d	Driftänderungsmatrix
\mathbf{x}_k	Einheitsvektor
\mathbf{X}_w	Schemamatrix
X_{wij}	Element der Schemamatrix
\mathbf{X}_z	Zyklusmatrix
\mathbf{Y}	Wägewertvektor
$\langle \mathbf{Y} \rangle$	Vektor der justierten Wägewerte, der geschätzter Erwartungswägewerte
y	Erwartungswägewert, unkorrigiertes Wägeergebnis
Y	Wägewert (Messwert)
$\langle Y \rangle$	Justierter Wägewert, geschätzter Erwartungswägewert
\mathbf{y}'	Gewichteter Wägewertvektor
y_0	Wägewert im unbelasteten Zustand bei idealisierter Waagencharakteristik
\mathbf{Y}_a	Auftriebskorrigierte Wägewerte
$\Delta \mathbf{e}_k$	Differenz der Residuen eines Zyklus
Δh	Änderungen der Relativen Feuchte
Δt	Zeitspanne zwischen aufeinander folgenden Wägungen
Δt	Temperaturänderungen
Δy_0	Verschiebung des Wägewertes im unbelasteten Zustand
ΔY_k	Wägewertdifferenz eines Zyklus
$\Delta \rho_a$	Luftdichteänderungen
\mathbf{P}	Materialdichtematrix
\mathbf{P}_a	Luftdichtematrix
β	Variabler erweiterter Massevektor
δ	Abweichung einer Größe von ihrem Mittelwert
ε	Vektor der freien Driftabweichungen
γ	Variabler Massevektor
λ	Lagrange - Multiplikator
λ	Vektor von Lagrange - Multiplikatoren
ν	Anzahl linearer Beziehungen
ρ	Dichte

ρ_a	Luftdichte
$\boldsymbol{\rho}_{a0}$	Vektor der Bezugsluftdichte
ρ_{ai}	Komponente des Luftdichtevektors
ρ_j	Komponente des Dichtevektors

Begriffe

Arbeitsniveau m_w	Das Arbeitsniveau einer Waage gibt den nominalen Massewert von den Objekten an, mit denen eine <i>Substitutionswägereihe</i> durchgeführt wird.
Beobachtungszeitraum	Zusammenhängender Zeitraum, in dem eine <i>Wägereihe</i> aufgenommen wird, bei der die <i>Wägewerte</i> aufgrund von Einflussparametern voneinander abhängen. <i>Wägewerte</i> , zwischen denen aufgrund der <i>Drift</i> eine Bindung besteht, gehören also demselben Beobachtungszeitraum an. Zwischen den <i>Wägewerten</i> in einem Beobachtungszeitraum besteht eine Korrelation. Ein Beobachtungszeitraum enthält im Allgemeinen mehrere <i>Zyklen</i> . Er kann aber auch aus nur einem <i>Zyklus</i> bestehen.
Doppelsubstitution	Verfahren zur Bestimmung von Massewerten durch <i>Substitution</i> , bei dem die <i>Zyklen</i> jeweils aus vier <i>Wägungen</i> in einer Reihenfolge, zum Beispiel Normal – Prüfling – Prüfling – Normal, gebildet werden.
Drift	Allgemein: Zeitliche Änderung der Charakteristik eines Messgerätes oder der physikalischen Eigenschaften eines Normals. Im Besonderen: Zeitliche Änderung des <i>Vorlastwertes</i> einer Waage während einer <i>Wägereihe</i> . Im Falle einzelner <i>Wägungen</i> entspricht die <i>Drift</i> der Änderung des <i>Vorlastwertes</i> von einer <i>Wägung</i> zur nächsten.
Driftabweichung E	Siehe <i>Driftänderung</i>
Driftänderung E	Die durch drei aufeinander folgende <i>Wägungen</i> definierte Abweichung der <i>Drift</i> von einer konstanten <i>Drift</i> . Es handelt sich also um unterschiedliche Änderungen der <i>Vorlastwerte</i> .
Driftänderungsvektor \mathbf{E}	Vektor, dessen Komponenten die <i>Driftänderungen</i> während einer <i>Wägereihe</i> sind.
Driftänderung, freie	Eine <i>Driftänderung</i> , die mathematisch als variabel behandelt wird. Freie Driftänderungen sind dann vorzusehen, wenn das <i>LDA – Modell</i> angewandt werden soll.
Driftänderung, unfreie	Eine <i>Driftänderung</i> , die mathematisch als fest vorgegeben behandelt wird, wie zum Beispiel bei der <i>Einfach-</i> oder <i>Doppelsubstitution</i> , bei der die <i>Driftänderung</i> null ist.
Driftänderungsmatrix \mathbf{X}_d	Die Driftänderungsmatrix definiert ein lineares Gleichungssystem zwischen <i>Vorlastwerten</i> . Wenn man die Driftänderungsmatrix auf den <i>Vorlastvektor</i> anwendet, erhält man den <i>Driftänderungsvektor</i> \mathbf{E} .
Driftbeziehung	Mathematische (lineare) Beziehung zwischen <i>Driftwerten</i> , also zwischen <i>Vorlastwertänderungen</i>
Driftbindung	Sie liegt dann vor, wenn eine feste <i>Driftbeziehung</i> besteht. Driftbindungen definieren also die <i>unfreien Driftänderungen</i> .
Driftgleichung	Eine in Gleichungsform ausgedrückte <i>Driftbeziehung</i>
Driftmatrix \mathbf{D}	Um Nullspalten erweiterte Driftänderungsmatrix. Angewandt auf den <i>erweiterten Massevektor</i> stellt sie den <i>Driftänderungsvektor</i> \mathbf{E} dar.
Driftwert \dot{m}_p	Die Änderung eines <i>Vorlastwertes</i>

Einfachsubstitution	Verfahren zur Bestimmung von Massewerten durch <i>Substitution</i> , bei dem Normal und Prüfling wechselseitig gewogen werden. Eine <i>Wägereihe</i> nach dem Prinzip der Einfachsubstitution wird häufig mit einer zusätzlichen Wägung des Normals abgeschlossen. Ein Beispiel ist die Wägereihe Normal – Prüfling – Normal – ... – Prüfling – Normal. Der <i>Zyklus</i> der Einfachsubstitution wird hier durch Normal – Prüfling – Normal definiert. Die Wägereihe in diesem Beispiel besteht aus korrelierten Zyklen.
Empfindlichkeit $y'(m_w)$	Steigung der <i>Waagencharakteristik</i> an einem gegebenen <i>Arbeitsniveau</i> .
Festpunktabweichung	Messabweichung eines Messgerätes, wenn der Wert der Messgröße gleich dem Justierwert ist.
Freiheitsgrad f	Anzahl der Wertesätze aus voneinander unabhängigen Beobachtungen, durch die die Ergebnisse einer Messung überbestimmt sind.
Gewichtung	Mit Hilfe eines Systems von Multiplikatoren kann man die Genauigkeiten der Gleichungen in einem linearen Gleichungssystem verändern, indem man die Messabweichungen beziehungsweise Varianzen unterschiedlich bewertet. Bei der Durchführung einer Ausgleichsrechnung kann man auf diese Weise für einzelne Gleichungen unterschiedliche Gewichtungen vorgeben.
Gewichtungsmatrix	Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente Gewichtungen darstellen.
Gewichtungsvektor	Vektor, dessen Elemente Gewichtungen darstellen
Kalibrierformel	Gleichung zur Bestimmung des Massewertes eines zu kalibrierenden Objektes aus <i>Wägewerten</i> , Mess- oder Schätzwerten der Einflussparameter und dem Massewert des verwendeten Massenormals.
Komparatorkoeffizienten	Die Empfindlichkeit einer Komparatorwaage hängt von bestimmten Einflussparametern wie Temperatur, Luftdruck und Relative Feuchte ab. Diese Abhängigkeiten werden durch die Komparatorkoeffizienten beschrieben.
Kovarianz	Schätzwert für das Produkt der Abweichungen zweier Größen von ihren Erwartungswerten.
Last m_a	Die in der Masseneinheit dargestellte Gravitationswirkung der Masse eines Körpers auf den Lastaufnehmer einer Waage unter Berücksichtigung des Luftauftriebs und gegebenenfalls weiterer physikalischer Kraftwirkungen auf den Körper durch andere Einflussgrößen.
Lastvektor \mathbf{m}_a	Vektor, dessen Komponenten die <i>Last</i> bei den <i>Wägungen</i> während einer <i>Wägereihe</i> darstellen.
LD - Verfahren	Least Deviation Ausgleichsverfahren hinsichtlich der <i>Wägewertabweichungen</i> nach dem Prinzip der geringsten Abweichungsquadrate
LDA - Verfahren	Least Drift Alteration Verfahren zur Massebestimmung durch <i>Substitution</i> bei Elimination der <i>Drift</i> nach dem Prinzip der geringsten <i>Driftänderungen</i> während einer <i>Wägereihe</i> . Dieses Prinzip besagt, dass der Verlauf der <i>Vorlastwerte</i> so gewählt ist, dass die Quadrate der Abweichungen von einer

konstanten *Drift* am geringsten sind.

Massevektor \mathbf{m}	Vektor, dessen Komponenten die Massewerte der an einer <i>Wägereihe</i> beteiligten Objekte sind.
Massevektor, erweitert \mathbf{M}	Vektor, der sich aus dem <i>Massevektor</i> und dem <i>Vorlastvektor</i> zusammensetzt.
Massevektor, expandiert \mathbf{M}_e	Vektor, der sich aus dem <i>Massevektor</i> , dem <i>Vorlastvektor</i> und Lagrange-Multiplikatoren zusammensetzt.
Schemamatrix \mathbf{X}_w	<i>Wägeschema</i> dargestellt in Form einer Matrix, die aus den Elementen 0 und 1 gebildet wird.
Stochastisch unabhängig	Zufällige Schwankungen von Beobachtungen werden auch als stochastisch unabhängig bezeichnet. <i>Wägewerte</i> , die man um die systematischen Einflussgrößen Masse und Auftrieb bereinigt und für die man mit einem geeigneten Driftmodell die <i>Vorlastwerte</i> eliminiert, werden als stochastisch behandelt.
Substitution	Verfahren zur Massebestimmung durch Massevergleich in Form einer <i>Wägereihe</i> , die dadurch festgelegt ist, dass das Massenormal und die Objekte, deren Massewerte zu bestimmen sind, in einer bestimmten Reihenfolge zeitlich definiert einzeln gewogen werden. Entsprechend dem Substitutionsschema wird das Normal durch die unbekannten Objekte in der Regel mehrfach substituiert (ausgetauscht).
Tarawert	Additiver Bestandteil eines <i>Wägewertes</i> , der sich mit Hilfe der Taraeinrichtung einer Waage verändern lässt. Der Tarawert beeinflusst daher nicht das Ergebnis einer <i>Substitutionswägung</i> .
Typ A - Unsicherheit	Unsicherheit des Ergebnisses einer Messung, die man durch statistische Analyse einer Serie von Beobachtungen (z.B. einer <i>Wägereihe</i>) bestimmen kann.
Typ B - Unsicherheit	Unsicherheit des Ergebnisses einer Messung, die man durch andere als statistische Analysen einer Serie von Beobachtungen (z.B. einer <i>Wägereihe</i>) bestimmen kann.
Varianz	Schätzwert für das Quadrat der Abweichungen einer Größe von ihrem Erwartungswert.
Vorlastvektor \mathbf{m}_p	Vektor, dessen Komponenten die Vorlastwerte sind.
Vorlastwert m_p	Abweichung zwischen dem aus <i>Wägewert</i> und Empfindlichkeit resultierenden Massewert und der <i>Last</i> . Der <i>Vorlastwert</i> wird daher als fiktive Eigenschaft der Waage während der <i>Wägung</i> angesehen.
Waagencharakteristik $y(m_a)$	Funktioneller Zusammenhang zwischen <i>Wägewert</i> und <i>Last</i> bei konstanten Werten von Luftdichte, Luftdruck, Temperatur und Relativer Feuchte.
Waagendrift	Während einer <i>Messreihe</i> sich ändernde <i>Vorlastwerte</i> (siehe auch <i>Drift</i>).
Wägefolge	Nacheinander durchgeführte <i>Wägungen</i> an ein und demselben Objekt
Wägegleichung	Gleichung für die Masse eines Objektes, die bei einer <i>Wägung</i> aus dem Gleichgewicht der von den Einflussgrößen erzeugten Kräfte resultiert.

Wägematrix \mathbf{X}	Sie enthält die um Auftriebsterme ergänzte <i>Schemamatrix</i> und ist um eine Einheitsmatrix erweitert.
Wägereihe	Nacheinander durchgeführte <i>Wägungen</i> an nicht immer demselben Objekt
Wägeschema	Darstellung der Struktur einer <i>Wägereihe</i> , an der das Massenormal und die zu kalibrierenden Objekte beteiligt sind.
Wägewert y	Unkorrigiertes Ergebnis einer <i>Wägung</i> , dargestellt durch genau den Wert, der nach Aufbringen einer <i>Last</i> in der Anzeige der Waage erzeugt wird.
Wägewertvektor \mathbf{y}	Vektor, dessen Elemente die <i>Wägewerte</i> sind, geordnet in der Reihenfolge ihrer Erfassung.
Wägezyklus	Siehe <i>Zyklus</i> .
Wägung	Das Aufbringen einer <i>Last</i> auf den Lastaufnehmer einer Waage verbunden mit der Rückmeldung eines <i>Wägewertes</i> durch die Anzeigeeinheit der Waage.
Zyklenfolge	Nacheinander durchgeführte <i>Wägezyklen</i> . Sie bilden also eine <i>Wägereihe</i> .
Zyklus	Kleinsten Teilabschnitt einer <i>Wägereihe</i> , der nach dem Verfahren der <i>Substitution</i> eine Bestimmung der Massewerte der beteiligten Objekte zulässt.
Zyklusdifferenz ΔY_k	Wägewertdifferenz, die sich für einen gegebenen Zyklus k aus den <i>Wägewerten</i> errechnet.
Zyklusmatrix \mathbf{X}_z	Die Zyklusmatrix legt die Berechnungsformel für die <i>Zyklusdifferenzen</i> fest. Angewandt auf den <i>Wägewertvektor</i> ergibt die Zyklusmatrix den Vektor der Zyklusdifferenzen.

Hauptteil

1 Einleitung

Die Bestimmung der schweren Masse ist immer ein Vergleich zwischen einem Normal und einem Prüfling. Bei herkömmlichen mechanischen Waagen geschieht dies durch Anwendung von Hebel und Federn. Elektronische Waagen stellen einen Vergleich des von einem Prüfling erzeugten Wägesignals mit einer „Skalierung“ her. Die Skalierung wird in einem Justiervorgang durch das von einem Normal erzeugte Wägesignal auf die richtige Empfindlichkeit eingestellt. Komparatorwaagen vergleichen die Wägesignale, die bei *Substitutionswägungen* geliefert werden.

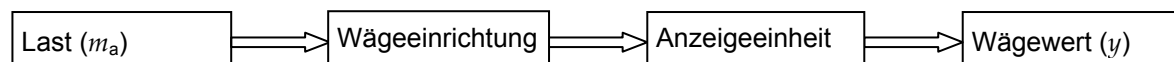
In der vorliegenden Arbeit werden hoch genaue Massebestimmungen behandelt. Aufgrund der angestrebten hohen Genauigkeit kommen nur Substitutionswägungen in Frage. Die zu verwendenden Waagen sind Komparatorwaagen. Ein Massevergleich besteht mindestens aus zwei *Wägungen*, also durch Vergleich der an den Objekten angreifenden Schwerkraft. Zur statistischen Absicherung der Ergebnisse werden die Wägungen je Objekt in der Regel mehrfach durchgeführt. Das Ergebnis einer Wägung, der *Wägewert* γ , hängt von verschiedenen Parametern ab. Man muss davon ausgehen, dass diese sich von Wägung zu Wägung ändern können. Zur physikalischen Beschreibung jeder Wägung sind folgende Größen zu nennen, von denen der Wägewert abhängt:

- Die Last m_a . Sie entspricht der Resultierenden aller Kräfte, die im mechanischen Gleichgewicht von außen auf den Lastaufnehmer der Waage wirken. Sie wird in Masseneinheiten dargestellt.
- Die Masse m des auf dem Lastaufnehmer befindlichen Gewichtstücks. Sie bewirkt die Schwerkraft, die zur Kräftebilanz und damit zur Last beiträgt.
- Die Dichte ρ_a der Luft, die das Gewichtstück umgibt. Von ihr hängt der Auftrieb ab, der ebenfalls zur Kräftebilanz und damit zur Last beiträgt.
- Die mittlere Dichte ρ des Gewichtsmaterials, von dem das Volumen des Körpers abhängt, der die Last darstellt. Von dem Volumen hängt die Größe des Auftriebs ab.

Der Wägewert γ stellt also als Ergebnis einer Wägung die Last m_a dar, die ihrerseits durch die Masse, die Luftdichte und die Materialdichte gegeben ist [1], [2], [29].

Da man den angezeigten Wägewert im Falle elektronischer Waagen bei jeder Last auf 0 setzen kann (Tarieren), muss berücksichtigt werden, dass er im Allgemeinen von einem konstanten *Tarawert* überlagert wird. Dies bedeutet, dass man den Wägewert als physikalische Größe zu verstehen hat, die bis auf eine additive Konstante die Last widerspiegelt.

Die Umwandlungskette von der Last zum Wägewert stelle man sich wie folgt aufgelöst vor:



Die eigentliche Umwandlung von der Last bis zum Wägewert erfolgt durch eine Vielzahl von Baugruppen, deren technische Details im Einzelnen hier nicht behandelt werden, deren Gesamteinfluss aber von Bedeutung ist. Die Baugruppen, die aus der Last m_a ein Wägesignal erzeugen, werden als Wägeeinrichtung zusammengefasst. Die Anzeige setzt das Wägesignal um und liefert den Wägewert γ bei Superposition eines konstanten Tarawertes. Die Wägeeinrichtung unterliegt im Wesentlichen den Einflussparametern Luftdruck, Temperatur und Relative Feuchte. Entsprechend ist das Wägesignal eine Überlagerung verschiedener Anteile, wobei vorausgesetzt wird, dass der von der Last erzeugte Anteil dominiert, da andernfalls eine Massebestimmung nicht möglich wäre [34].

Elektronische Komparatorwaagen werden in der Regel zu Beginn einer Messreihe justiert. Dies bedeutet, dass die *Waagencharakteristik* auf dem nominalen *Arbeitsniveau* m_w der gewählten Anwendung auf eine Steigung eingestellt wird, die der *Empfindlichkeit* 1 entspricht.¹

¹ Diese Annahme gilt ohne Beschränkung des allgemeinen Falles. Wenn sie nicht zutrifft, muss der Wägewert mit einem konstanten Empfindlichkeitsfaktor multipliziert werden.

Am Arbeitsniveau m_w verläuft die Waagencharakteristik $y(m_a)$ lokal linear. In einem Diagramm würde der lineare Verlauf also einer Tangente an die Charakteristik entsprechen. Wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass die Empfindlichkeit, beziehungsweise die Steigung der Tangente von der Last unabhängig ist, wäre der Zustand ohne Last durch eine lineare Extrapolation der Tangente zur y -Achse definiert. Bei einer insgesamt nichtlinearen Charakteristik muss man dann im belastungsfreien Zustand von einer Verschiebung Δy_0 des Wägewertes um einen konstanten Wert ausgehen (siehe Abb. 1-1).¹

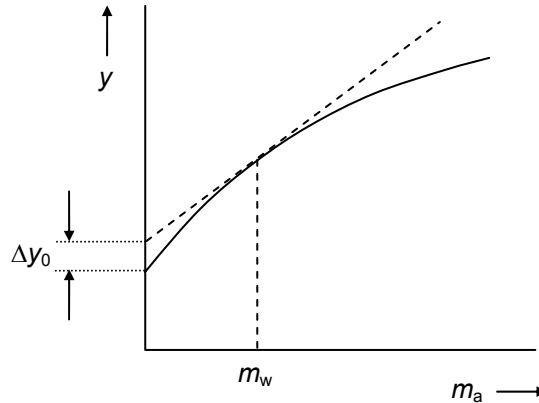


Abb. 1-1: Waagencharakteristik

Nach diesen Überlegungen wird die Umwandlungskette von der Last zum Wägewert durch folgendes Modell beschrieben:

$$m_a + m_p = y \cdot \quad (1-1)$$

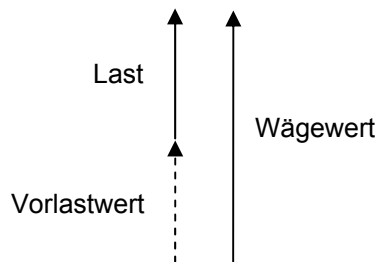


Abb. 1-2: Wägemodell

Die additive Größe m_p , die „Vorlastwert“ genannt werden soll, stellt den Zustand der Waage dar, bei dem sie unbelastet ist. Aufgrund der hohen Auflösung der Waage muss man davon ausgehen, dass von Wägung zu Wägung sich ändernde Einflussparameter Änderungen des fiktiven Vorlastwertes bewirken. Somit wird der Vorlastwert von folgenden, den Wägewert darstellenden Beiträgen gebildet:

- Vom Tarawert als additive Konstante
- Von einer weiteren additiven Konstante Δy_0 aufgrund der Annahme einer linearen Gesamtcharakteristik
- Von einem zusätzlichen Wägesignal, erzeugt von den Einflussparametern der Wägeeinrichtung

Der Vorlastwert darf nicht mit dem Begriff „Vorlast“ verwechselt werden. Während die Vorlast ein Gegenstand ist, mit dem die Waage vor der eigentlichen Wägung belastet wird, stellt der Vorlastwert nur einen physikalisch begründeten Zahlenwert dar, der bei der Wägung zu berücksichtigen ist. Das Auftreten eines Vorlastwertes vermittelt jedoch den Eindruck, als sei die Waage vorbelastet, weil der Vorlastwert die Generierung des Wägewertes additiv beeinflusst (Abb.1-3).

¹ Sollte die Komparatorwaage ein Bereichsfenster besitzen, so dass das Bereichsminimum einem Lastwert größer als 0 entspricht, ist die Waagencharakteristik außerhalb des Bereichsfensters nicht definiert. Dennoch ist formal eine Extrapolation zum unbelasteten Zustand möglich. Aus diesem Grunde spielt es bei diesen Überlegungen keine Rolle, ob der Wägebereich der Komparatorwaage bei der Last 0 beginnt oder nicht.

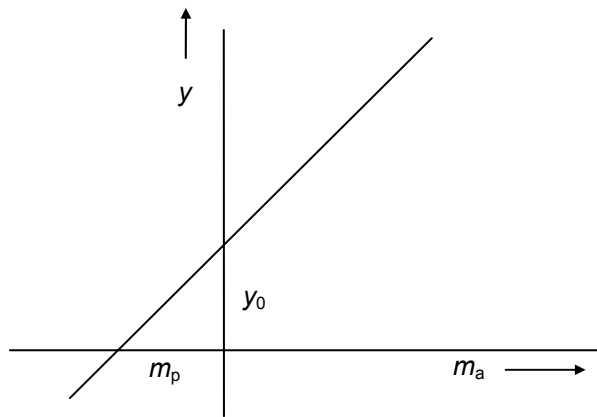


Abb. 1-3: Idealisierte Charakteristik mit Vorlastwert

Während die Last eine Eigenschaft des Objektes auf dem Lastaufnehmer ist, ist der Vorlastwert als Eigenschaft der Waage zu verstehen. Bei Wägungen im alltäglichen Leben spielt der Vorlastwert allerdings keine Rolle, weil er ausreichend stabil ist. Es wurde oben festgestellt, dass der Vorlastwert durch Trieren verändert und somit neu festgelegt werden kann. Obwohl der Vorlastwert auf diese Weise „manipuliert“ werden kann, ist er bei Wägungen höherer Genauigkeit dennoch von Bedeutung, denn er stellt nicht nur konstante Beiträge dar, sondern, wie oben dargestellt, auch ein von den Einflussparametern der Wägeeinrichtung generiertes Wägesignal. Dieses kann das Ergebnis der Massebestimmung signifikant beeinflussen. Die Behandlung und mathematische Eliminierung des Vorlastwertes in *Wägereihen* wird Hauptthema in dieser Arbeit sein.

Der Wägewert als Ergebnis einer Messung soll eine Aussage über den zu erwartenden Wert möglichst genau vermitteln. Wenn alle Größen, die den Wägewert formen, in ihrer Wirkung genau bekannt wären, könnte man von dem Wägewert auf den zu erwartenden Wert rechnerisch schließen. Es trifft aber nur für einige der Einflussgrößen zu, dass man den Beitrag zum Wägewert durch einen mathematischen Zusammenhang ausdrücken kann. Wenn man beispielsweise die Luftdichte durch eine unabhängige Messung simultan mit der Wägung bestimmt, kann man den Einfluss des Auftriebs am Objekt unmittelbar berechnen. Über viele Einflussgrößen gibt es jedoch zu wenig Kenntnis, als dass man die Auswirkungen auf den Wägewert rechnerisch darstellen kann.

Es ist grundsätzlich nicht möglich, den Erwartungswägewert mit absoluter Sicherheit zu bestimmen. Jedoch kann er mit einer zahlenmäßig darstellbaren statistischen Sicherheit geschätzt werden. Aus diesen Gründen geht man von der Vorstellung aus, dass durch zufälliges Einwirken der verschiedensten physikalischen Einflussgrößen dem Erwartungswägewert statistisch schwankende Beiträge überlagert werden. Das Besondere dieser Beiträge ist, dass bei vielfacher Wiederholung der Messung ihr Mittelwert dem Erwartungswert 0 zustrebt, und dass es keine Korrelationen zwischen ihnen gibt.

Es ist anzustreben, zwischen den systematischen und den zufälligen Einflüssen klar zu trennen. Dies gelingt besonders dann gut, wenn die Zusammenhänge berechnet werden können. Beispiele dazu sind:

- Die Luftdichte und ihre Parameter
- Die Materialdichte der Objekte
- Die jeweilige Schwerpunktlage der Objekte¹
- Die thermische Ausdehnung der Objekte²
- Die Masse des Normal

¹ In dieser Arbeit wird allerdings davon ausgegangen, dass die Schwerpunkthöhen aller Objekte gleich sind.

² Auch in dieser Hinsicht sollen die Materialien der Objekte gleiche thermische Koeffizienten haben.

Unbekannte Abweichungen zwischen den gemessenen und den tatsächlichen Werten dieser Einflussgrößen bewirken nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß Beiträge zur Unsicherheit des Erwartungswägewertes [11]¹. Hierzu seien als Beispiele genannt [3], [4], [14], [25], [29], [31]:

- Die Unsicherheit des Massenormals
- Messunsicherheit der Luftdichte aufgrund der *Festpunktabweichungen* der Messgeräte zur Bestimmung der Luftdichteparameter
- Unsicherheit der Luftdichte aufgrund der Unsicherheit ihrer Berechnungsformel
- Unsicherheit des Auftriebs aufgrund der Unsicherheit der Materialdichten
- Unsicherheit bei der Bestimmung der Objektschwerpunktslagen
- Unsicherheit in der Kenntnis der thermischen Ausdehnungskoeffizienten

Auf direkte Art und Weise geht ferner die Unsicherheit der Empfindlichkeit der Komparatorwaage in den Wägewert ein [1], [3], [29].

Statistische Einflüsse jedoch sind zufällig und daher nicht vorhersehbar [11], [16]. Für einige dieser Einflüsse könnte man die Auswirkung auf den Wägewert rechnerisch darstellen, wenn man ihren momentanen Wert genau erfassen könnte. Da ihre Schwankungen aber zufällig sind, führt eine rechnerische Darstellung nicht weiter. Bei anderen Einflüssen kann man einen Zusammenhang zwischen ihnen und dem Wägewert zwar vermuten aber nicht gesetzmäßig darstellen. Zufällige Einflüsse sind [1], [3], [12], [29], [30]:

- Zufällige Schwankungen der Auftriebskräfte am Messobjekt und an Komponenten der Waage
- Zufällige Empfindlichkeitsänderungen der Waage aufgrund von Temperaturschwankungen
- Zufällige Masseänderungen des Objekts und der Komponenten der Waage durch Schwankungen der Oberflächenfeuchte
- Zufällige Schwankungen durch thermisches Rauschen elektronischer Elemente
- Zufällige Trägheitskräfte am Messobjekt und am Kraftaufnehmer der Waage aufgrund von Positionsschwankungen der Aufstellfläche der Waage (Erschütterungen)
- Zufällige Kräfte am Messobjekt und an den beweglichen Komponenten der Waage aufgrund thermischer Effekte und Strömungsturbulenzen
- Zufällige Schwankungen der Abweichungen des Messzeitpunktes von der Sollzeit
- Abweichungen der Wägewerte aufgrund der digitalen Teilung durch den Effekt der Rundung²

Es gibt eine weitere Gruppe von Einflussgrößen, die bei der genauen Massebestimmung größere Probleme bereiten können. Es handelt sich um die folgenden [4], [29], [38]:

- Magnetische Einflüsse
- Elektrostatische Einflüsse
- Luftströmungen an den Objektoberflächen

Die Behandlung dieser Einflüsse ist nicht Thema dieser Arbeit. Es wird hier davon ausgegangen, dass sie klein genug sind, um vernachlässigt werden zu können. Dies ist dann gegeben, wenn man dafür sorgt, dass die Permeabilität und die Magnetisierbarkeit der Objekte genügend klein sind, dass das Auftreten statischer Kontaktelektrizität vermieden wird und dass Temperaturgradienten, die in der Regel Luftströmungen bewirken, möglichst gering gehalten werden [21].

Eine ebenfalls wichtige Größe bei der Massebestimmung ist der Vorlastwert. Er wurde bisher vernachlässigt. Dies hängt mit den bisher unzureichenden Methoden der Trennung zwischen berechenbaren (systematischen) und zufälligen Einflüssen auf den Vorlastwert zusammen. Dies hat folgende Gründe:

¹ In vereinfachter Form bedeutet dies: Die Varianz der Wägewerte ergibt sich aus der Summe der mit den Empfindlichkeitsquadraten multiplizierten Varianzen der Einflussgrößen.

² Sie können dann als zufällig angesehen werden, wenn die Teilungswerte genügend klein sind.

- Der Vorlastwert kann aufgrund der sich ändernden Einflussgrößen der Wägeeinrichtung nicht als konstant angenommen werden. Der Vorlastwert verändert sich also von Messung zu Messung (*Drift*).
- Bei wiederholten Messungen (Wägungen) wird zwar die Entwicklung der Wägewerte erfasst, dies darf aber nicht mit der Entwicklung der Vorlastwerte gleichgesetzt werden. Diese Unterscheidung wird in dieser Arbeit grundsätzlich eingehalten.
- Für die zeitliche Entwicklung der Vorlastwerte müssen bestimmte Annahmen getroffen werden. Im Einklang mit anderen Autoren wird zukünftig von Driftmodellen gesprochen [5]. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass die sich ergebenden Schätzungen der Erwartungswägewerte vom Driftmodell abhängen.
- Im Idealfall eines Driftmodells, das die Erwartungsdrift genau widerspiegelt, wären die Erwartungswägewerte korrekt berechenbar. Nur in diesem Falle wären die dann noch verbleibenden Abweichungen von den Erwartungswägewerten zufällig.
- Je weniger gut ein Driftmodell angepasst ist, desto mehr muss mit systematischen Abweichungen der gemessenen Wägewerte von den Erwartungswägewerten gerechnet werden. In diesem Falle gäbe es zwischen den Wägewerten relativ große Abhängigkeiten.
- Die sich ergebende Standardabweichung hängt von der Wahl des Driftmodells ab. Es ist aber in Frage gestellt, ob grundsätzlich dasjenige Driftmodell am besten geeignet ist, bei dem sich die geringste Standardabweichung ergibt.

Das Driftmodell muss so festgelegt sein, dass es einerseits systematische zeitliche Änderung der Vorlastwerte darstellt, andererseits zufällig streuende Anteile zulässt, welche die statistische Streuung der Wägewerte mit beeinflussen. Es geht also um das Problem der Abtrennung der systematischen Änderungen der Vorlastwerte, so dass nur noch ein statistischer Anteil verbleibt. Dies ist die Thematik dieser Arbeit.

Im Falle von Wägungen mit hoch auflösenden Waagen müssen alle sich zeitlich ändernden physikalischen Einflüsse auf den Zustand der Wägeeinrichtung berücksichtigt werden [43]. Es muss davon ausgegangen werden, dass es in der Regel alle am Wägeprozess beteiligten Größen sind, die sich auch zeitlich ändern. Die wichtigsten Abhängigkeiten von der Zeit t sind:

Änderungen der Luftdichte	$\rho_a(t)$
Drift der Masse	$m(t)$
Änderungen der Last	$m_a(t)$
Wägewertänderungen	$y(t)$
Drift der Vorlastwerte	$m_p(t)$

Zur korrekten Terminologie ist im Falle der Drift noch folgendes zu bemerken: Bei einem linearen Driftmodell ist die Änderung des driftenden Parameters zeitlich konstant. In diesem Falle ist die Drift konstant. Bei einem quadratischen Driftmodell ändert sich die Drift linear. Entsprechendes gilt für Modelle höherer Ordnung.

Die Änderungen der Luftdichte kann man bei jeder Wägung durch Messung der Luftdichteparameter und anschließender Berechnung ermitteln [31]. Die Drift der Masse ist auf Langzeiteinflüsse zurückzuführen [28]. Sie ist während einer Wägereihe vernachlässigbar. Deshalb wird hier die Masse als konstant angenommen. Die Änderungen der Last ergeben sich rechnerisch aus den Änderungen der Luftdichte. Die Wägewertänderungen ergeben sich direkt aus den sich ändernden Messwerten für das gleiche Messobjekt.

Über die Drift der Vorlastwerte gibt es bisher nur wenig genaue Kenntnis. Zum Beispiel findet man in der Literatur über die Zusammenhänge der *Waagendrift* mit Einflussparametern wie der Luftdichte, der Temperatur, dem Luftdruck und der Relativen Feuchte keine quantitativen Ausführungen. Dies ist aber auch hier nicht von Bedeutung, da es nur darauf ankommen soll, die unbekannte Drift der Vorlastwerte zu eliminieren, um auf diese Weise zu driftbereinigten Schätzungen der Massewerte zu gelangen. Dies ist nur dann möglich, wenn gewisse Annahmen zum Driftverhalten gemacht werden. Hierzu findet man in der Literatur einige Ausführungen. Folgende „Driftmodelle“ findet man behandelt:

1. Konstante zeitliche Änderungen der Wägewerte in Verbindung mit den bekannten Methoden der *Substitutionswägungen* [2], [4], [6], [10].¹
2. Approximation nicht konstanter zeitlicher Änderungen der Wägewerte durch Polynome maximal 3. Grades. Unter Anwendung der Methode der geringsten Quadrate der Wägewertabweichungen werden die Objektmassen und die Polynomkoeffizienten bestimmt [5], [7].^{2 3}

Zu diesen Driftmodellen sei folgendes angemerkt:

- a) Das Problem der Drift wird in den genannten Beiträgen an den zeitlichen Änderungen nur der Wägewerte untersucht. Wie oben dargestellt, sollte aber zwischen Änderungen der Wäge- und Lastwerte und der Drift der Vorlastwerte unterschieden werden. Wenn man diese Unterscheidung befolgt, was in dieser Arbeit geschehen wird, lassen sich die Methoden der mathematischen Drifteliminierung verbessern.
- b) Zur Weiterentwicklung von Driftmodellen erscheint es notwendig, sich von den Forderungen der Driftkonstanz zu lösen. Aus diesem Grunde sind bereits Polynome höheren Grades vorgeschlagen worden. Allerdings können mit einem kubischen Verlauf nur ein Maximum und ein Minimum realisiert werden. Für einen längeren *Beobachtungszeitraum* muss dieses Modell daher erweitert werden.
- c) Wenn man andererseits für das Polynom Elemente einer noch höheren Ordnung zulässt, stellt sich folgendes Problem ein: Man könnte ein Polynom eines so hohen Grades wählen, dass es eine vollständige Anpassung des Verlaufs gäbe, so dass alle Wägewerte genau auf der Driftkurve lägen. Dann wären die Summe der Quadrate der Abweichungen und damit die Standardabweichung Null.
- d) Aus diesen Gründen soll in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg als eine Anpassung durch Polynome eingeschlagen werden. Entscheidend dabei ist die Zielsetzung, dass die Drifteliminierung mit einem optimal angepassten Driftmodell erfolgen soll. Das bedeutet, nachdem die mit den Messungen einhergehenden zeitlichen Änderungen eliminiert sind, sollen nur noch zufällig schwankende Werte verbleiben. Diese Schwankungen werden dann durch eine Standardabweichung ausgedrückt, die auf statistisch unabhängigen Ereignissen beruht.

Im Prinzip bleibt es also bei der Verwendung linearer Driftmodelle, die aber jetzt auf die Vorlastwerte angewendet werden. Dabei wird streng nach den Prinzipien der geringsten Quadrate vorgegangen. Durch diesen neuen Ansatz ergibt sich die Möglichkeit, ein weiteres Problem der Substitutionswägung zu behandeln. Es handelt sich um Korrelationen, die in der Praxis bei der Auswertung bestimmter Substitutionszyklen bisher mehr oder weniger in Kauf genommen wurden.

Hierzu ein Beispiel:

Bei einer Wägereihe aus *Einfachsubstitutionen* mit N als Normal und P als Prüfling wird in der Regel nach dem Schema N P N P N N P N verfahren. Die ersten drei Wägewerte für N P N bilden den ersten *Zyklus* und liefern eine Wägewertdifferenz. Der nächste Zyklus N P N setzt sich aus dem dritten, vierten und fünften Wägewert zusammen. Er liefert eine weitere Wägewertdifferenz. Da die beiden Wägewertdifferenzen einen gemeinsamen Wägewert für das zweite N enthalten, sind sie nicht unabhängig voneinander. Diese Abhängigkeit setzt sich auf die anschließenden Zyklen entsprechend fort [1], [2], [6], [29].

Allgemein tritt das Problem korrelierender Wägewertdifferenzen dann auf, wenn dieselben Wägewerte in aufeinander folgenden Substitutionszyklen verarbeitet werden. Zur Problematik der Korrelation bei Substitutionszyklen gibt es in der Literatur einige Ausführungen. Es wurde zum Beispiel untersucht,

¹ Andere Autoren verwenden bei den Wägewerten ebenfalls den Begriff „Drift“ [5], [7]. In dieser Arbeit wird im Falle von Wägewerten von Wägewertänderungen gesprochen.

² I. Lira, führt zum Beispiel eine Ausgleichsrechnung durch, wobei er alle Einflussgrößen durch Korrekturen an den Wägewerten berücksichtigt. Er schreibt: „... the advantage of comparison measurements is that constant systematic effects common to all measurements need not to be modelled because their influence on the determination of the differences cancels out. However, it may be necessary to apply particular corrections to each reading (for example, buoyancy corrections in mass measurements). Further more, the instrument may be affected by drift effects.“ Lira schlägt dann für eine zeitabhängige Korrektur der Wägewerte ein Polynom 3. Grades vor, dessen Koeffizienten im Rahmen der Ausgleichsrechnung mit zu bestimmen sind. Er schreibt: „The order ... of the drift polynomial can be chosen at will, although it would seem unreasonable to go beyond ... = 3“ [5]

³ C.M. Sutton und M.T. Clarkson gehen ebenfalls von einem Ansatz zeitabhängiger Drift, dargestellt durch Polynome aus. Dabei untersuchen sie für mehrere Objekte die günstigste Wägereihe. Sie schreiben: „... the best performance is achieved when three to five items are involved in each comparison ...“. Sie fahren fort, dass bestimmte Wägereihen zu empfehlen sind: „... in the presence of linear, quadratic or cubic drift.“

wie die Standardabweichungen der unterschiedlichen Substitutionsschemata miteinander zusammenhängen [6], [42].¹

Wenn man jedoch nach vorliegender Arbeit verfährt, spielen Korrelationen bei Substitutionszyklen keine Rolle, weil jeder Wägewert ohne Differenz- und Mittelwertbildung direkt verwertet wird. Besonders ist auch, dass die systematischen Einflüsse schon bei jeder Wägung subtrahiert werden können. Wie bereits dargestellt, sind dies der simultan mit der Wägung auftretende Auftrieb und der Vorlastwert. Dieses Vorgehen ist dadurch möglich geworden, dass für jede einzelne Wägung jeweils auch eine *Wägegleichung* aufgestellt wird. Die auf dieser Basis entwickelten *Kalibrierformeln* beruhen auf einem vollständigen Satz dieser Wägegleichungen, wobei mit jeder einzelnen Wägung die simultan vorliegenden Parameterwerte unmittelbar berücksichtigt werden. Dieses Verfahren hat folgende Vorteile:

- A) Jeder Substitutionsablauf ist möglich, sofern die Anzahl der Wägungen auf die Anzahl der zu kalibrierenden Objekte abgestimmt ist, so dass eine Lösung existieren kann.
- B) Da keine Wägewertdifferenzen je Zyklus oder Wägereihe gebildet werden, gibt es auch keine Korrelationen zwischen den Abweichungen der Beobachtungen von den Erwartungswerten.
- C) Da die Auftriebskorrekturen je Wägung durchgeführt werden, sind Einflüsse, die aus Abweichungen der Parameterwerte von den tatsächlichen Werten resultieren, ausgeschlossen.
- D) Die Standardabweichung ergibt sich aus den einzelnen Wägeereignissen und nicht aus Wägewertdifferenzen. Auch hinsichtlich der Standardabweichung spielt die Wahl des Substitutionsschemas also keine Rolle. Daher ist die Benutzung von Umrechnungsfaktoren zwischen Standardabweichungen unterschiedlicher Substitutionsabläufe hier nicht relevant.

Vor diesem Hintergrund werden in dieser Arbeit Wägegleichungen und *Driftbeziehungen* für jedes Wägeereignis aufgestellt. Daraus werden Kalibrierformeln entwickelt, und es wird untersucht, ob sie den bisher üblichen Kalibrierformeln der Substitutionswägung entsprechen. Im Falle der Einfachsubstitution als Beispiel stellt sich heraus, dass es keine Übereinstimmung mit der bisherigen Praxis gibt. Das bedeutet nicht, dass Einfachsubstitution zukünftig nicht mehr durchgeführt werden kann. Aber die Kalibrierformeln sollten modifiziert werden. Entsprechendes gilt für andere Substitutionsarten, bei denen einzelne Wägereihen nicht voneinander unabhängig sind. Dadurch dass die Wägegleichungen die Vorlastwerte mit einschließen, können beliebige lineare Driftmodelle realisiert werden, die sich zeitlich abschnittsweise an den tatsächlichen Verlauf anpassen. Daraus ergibt sich eine Alternative zu den oben beschriebenen Polynom-Modellen. Für hoch genaue Kalibrierungen wird ein weiter verfeinertes Driftmodell entwickelt. Bei diesem Modell wird die zeitliche Entwicklung der Vorlastwerte von einer Bindung (*Driftbindung*) an einen linearen oder abschnittsweise linearen Verlauf befreit. Dieses Driftmodell ermöglicht eine optimale Anpassung an den tatsächlichen Driftverlauf. Im Vergleich zum Polynommodell kann diese Anpassung an beliebige Verläufe mit beliebig häufigen Steigungsänderungen ohne Einschränkung erfolgen. Das Modell beruht auf der neu entwickelten Methode der geringsten *Driftänderungen*. In Kurzform soll dieses Modell als **LDA** – Modell in Anlehnung an den englischen Ausdruck „**Least Drift Alteration**“ bezeichnet werden.

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit folgendermaßen auf:

Zunächst wird in Abschnitt 2.1 die individuell für jede Wägung geltende Wägegleichung aufgestellt. Dabei wird berücksichtigt, dass eine vollständige Wägegleichung auch den Vorlastwert enthalten muss. Basierend auf den einzelnen Wägegleichungen wird dann in Abschnitt 2.2 ein Gleichungssystem entwickelt, das die gesamte Wägereihe umfasst. Der jeweilige Zustand der Waage ist dadurch berücksichtigt, dass auch die Vorlastwerte Teil des Gleichungssystems sind. Der Auftrieb an den Objekten, der bei jeder Wägung anders sein kann, geht als Auftriebskorrektur ebenfalls in das Gleichungssystem ein.

Danach wird in Abschnitt 3.1 zunächst die Waagendrift genauer definiert. Dabei zeigt sich, dass die Waagendrift durch den sich von Wägung zu Wägung entwickelnden Vorlastwert dargestellt wird. Aufgrund einer stets diskreten Anzahl an Messpunkten wird die Waagendrift in Abschnitt 3.2 auf eine Folge von Vorlastwerten zurückgeführt. Ergänzend zu den Wägegleichungen wird ein Driftgleichungssystem aufgestellt. Dabei wird auch der Driftänderungsvektor definiert. Nach der

¹ Zum Beispiel spricht M. Gläser von der „Efficiency of comparison cycles“ [6], [42].

Einführung der Wägleichungen werden in Abschnitt 3.3 lineare Driftmodelle behandelt. Es zeigt sich eine vielfältige Gestaltungsmöglichkeit für lineare Driftmodelle. Entscheidend ist dabei auch die Struktur der gewählten Beobachtungszeiträume. Bei einem partiell linearen Driftmodell wird eine bessere Anpassung an nicht lineare Vorlastwertverläufe erreicht. Zu einer besonderen Bedeutung entwickelt sich der Vektor der Driftänderungen, der die Abweichungen zur jeweils gewählten konstanten Drift darstellt. Für den Anwender eröffnet sich die Möglichkeit, ein Driftmodell auszuwählen, welches nach seiner Erfahrung dem zeitlichen Verlauf der Einflussgrößen der Luftdichte in seinem Labor am besten entspricht.

Die aufgestellten Gleichungen sollten aus dem Blickwinkel heute üblicher Substitutionsverfahren bewertet werden. Dies erfolgt in Abschnitt 4.1 zunächst für das herkömmliche Verfahren der Einfachsubstitution. In Abschnitt 4.2 wird dann aber im Rahmen einer Verallgemeinerung die Möglichkeit der Gewichtung der Wägewertdifferenzen der Einfachsubstitution erarbeitet. In Abschnitt 4.3 wird auch das Verfahren der *Doppelsubstitution* auf das Wäge- und Driftgleichungssystem zurückgeführt, wobei in diesem Falle eine *Gewichtung* nicht von Bedeutung ist. Wenn man jedoch korrelierende Zyklen mathematisch korrekt auswerten möchte, zeigt sich, dass die Frage der Gewichtung von Wägewertdifferenzen, die in Theorie und Praxis bisher nicht aufgegriffen wurde, eine wichtige Rolle spielt. Entscheidend für die Gewichtung sind dabei die zugrunde liegenden Bestimmungsgleichungen der Wägewertdifferenzen je Zyklus. Deshalb werden für zwei Objekte in Abschnitt 4.4 die in Frage kommenden Zyklen grundsätzlich definiert. In Abschnitt 4.5 wird dann die theoretische Grundlage geschaffen für die beste Gewichtung von Wägewertdifferenzen, indem als mathematische Bedingung die geringste *Varianz* eingeführt wird. Im Anschluss an Abschnitt 5.1 wird der heuristische Ansatz von Abschnitt 4.5 durch Anwendung der Methode der geringsten Quadrate der Wägewertabweichungen noch einmal bestätigt. Somit ergibt sich für den Anwender die Empfehlung, im Falle der Einfachsubstitution zur Berechnung von Wägewertdifferenzen die bisher übliche Verwendung eines ungewichteten arithmetischen Mittels zu revidieren. Das nun vorliegende verbesserte Auswerteverfahren für Einfachsubstitution beruht vielmehr auf gewichteter Mittelwertbildung. Die zu verwendenden Gewichtungsfaktoren werden dem Anwender genannt. Er kann sie aber auch mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Gleichungssystems selbst berechnen. Auf jeden Fall hat sich gezeigt, dass trotz korrelierender Zyklen dennoch das Verfahren der Einfachsubstitution nach wie vor angewendet werden kann.

Mit Hilfe der Methode der geringsten Quadrate der Wägewertabweichungen wird in Abschnitt 5.1 eine allgemeine Lösungsformel der Wägleichungen entwickelt, die für jede Art linearer Driftmodelle verwendbar ist. Es wird dabei zunächst davon ausgegangen, dass Abweichungen der Waagendrift von dem jeweiligen Driftmodell vernachlässigbar beziehungsweise nicht zugelassen sind. Daher werden die Driftänderungen in diesem Fall als „*unfrei*“ bezeichnet. Die Lösungsmatrix, die die Kalibrierformel darstellt, hängt unter anderem von der Wahl des Driftmodells ab, also von den Nebenbedingungen für die Lösung der Wägleichungen. Je nach Driftmodell ist mit unterschiedlichen Standardabweichungen zu rechnen, weil die Anpassung des Verlaufs der Vorlastwerte an den tatsächlichen Verlauf von den Bindungen abhängt, die mit dem Driftmodell festgelegt sind. Dies wird in den Beispielen in Abschnitt 5.2 zum Ausdruck kommen. In Abschnitt 5.3 wird das in Abschnitt 5.1 entwickelte Verfahren weiterentwickelt. Durch die zusätzliche Forderung der geringsten Quadrate der Driftabweichungen entsteht hier das LDA – Modell („**L**east **D**rift **A**lteration“). Es setzt die Wahl eines Basismodells voraus entsprechend Abschnitt 3.3. Zusätzlich lässt es aber Abweichungen von den vorgegebenen Driftbeziehungen zu. Diese Abweichungen können nach der LDA – Methode so ausgeglichen werden, dass für die Vorlastwerte eine optimale Anpassung an den tatsächlichen Verlauf zu erwarten ist. Das LDA – Modell hat folgenden entscheidenden Vorteil: Es gibt weder eine konstante Waagendrift vor, noch erfolgen Verlaufsanpassungen mit quadratischen, kubischen oder Termen höherer Ordnung. In einem gesonderten Abschnitt 5.4 werden Eigenschaften der Lösungsmatrix hergeleitet beziehungsweise zusammengestellt. Dies wird bei zukünftigen Anwendungen von Nutzen sein. Danach wird in Abschnitt 5.5 ein Beispiel zum LDA – Modell vorgelegt, um den Lösungsweg durch eine praktische Anwendung zu belegen. Schließlich werden noch in Abschnitt 5.6 Approximationen für die Lösungsformel erarbeitet, die dann angewendet werden können, wenn vorausgesetzt werden kann, dass sich die Luftdichte während der Wägereihe gleichmäßig oder wenig ändert.

Wenn die hier erarbeiteten Methoden bei Kalibrierung von Gewichten zum Einsatz kommen, müssen auch die Unsicherheiten beziehungsweise die Varianzen und *Kovarianzen* behandelt werden. Die Ausführungen dazu findet man unter 6. Grundsätzlich werden dabei die internationalen Regelwerte über Unsicherheiten bei Messungen beachtet [8]. Die *Typ A – Unsicherheiten* der zu kalibrierenden Objekte ergeben sich aus den Abweichungen (Residuen) der Wägewerte von

denjenigen, die mit Hilfe der Methode der geringsten Abweichungsquadrate ausgeglichen wurden. Entscheidend dabei ist, dass die Wägewerte nach Abzug aller systematischen Beiträge nur noch zufällig schwanken. Die sich so ergebenden Residuen werden als normalverteilt angenommen. Die Bestimmungsgleichung für die Typ A – Unsicherheiten wird in Abschnitt 6.1 aufgestellt. In die Ermittlung der Standardabweichung geht der statistische *Freiheitsgrad* ein. Die Einzelheiten sind in Abschnitt 6.2 beschrieben. Schließlich werden in den Abschnitten 6.3 bis 6.5 die *Typ B – Unsicherheiten*, sowie die Varianzen und Kovarianzen behandelt. Von häufigem Interesse ist die Schätzung der Unsicherheit einer Massedifferenz. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Schätzung auf der Basis der einzelnen *Wägewerte* oder auf der Basis von *Zyklusdifferenzen* stattfindet. In Abschnitt 6.6 werden die Schätzungen behandelt und bewertet.

Im Abschnitt 7 wird ein Ausblick auf die Möglichkeit gegeben, die Waagendrift von Komparatorwaagen auf charakteristische Koeffizienten für Temperatur, Relative Feuchte und Luftdichte zurückzuführen. Dies wird dadurch ermöglicht, dass hier eine neue Methode erarbeitet worden ist, nach der die zeitliche Entwicklung der Vorlastwerte aufgenommen werden kann. Auf diese Weise lässt sich ein Zusammenhang darstellen zwischen dem Verlauf der Einflussparameter und der Vorlastwerte.

Die auf die elementaren Wägegleichungen zurückgeführten Residuen gestatten eine statistische Analyse der Wägedaten. Wie bereits dargestellt, müssen die Residuen in idealer Weise normalverteilt sein. Falls dies nicht der Fall ist, finden durch systematische Einflüsse regelmäßige Verschiebungen der Wägewerte statt. Dies kann man an der Verteilung der Residuen feststellen. In Abschnitt 8 wird zu diesem Thema ein Beispiel behandelt.

2 Wägegleichungen

2.1 Grundgleichung

In dieser Arbeit geht es um Systeme von *Wägegleichungen*, die eine Vielzahl von *Wägungen* an im Allgemeinen mehreren Objekten und in bestimmten Reihenfolgen darstellen. Zur Unterscheidung der verschiedenen Wägeprozesse werden nachstehend aufgeführte Begriffe verwendet, die mit der gebräuchlichen Praxis weitgehend übereinstimmen dürften:

Last	Die in der Masseneinheit dargestellte Gravitationswirkung der Masse eines Körpers auf den Lastaufnehmer einer Waage unter Berücksichtigung des Luftauftriebs und gegebenenfalls weiterer physikalischer Kraftwirkungen auf den Körper durch andere Einflussgrößen.
Vorlastwert m_p	Abweichung zwischen dem aus Wägewert und Empfindlichkeit resultierenden Massewert und der Last. Der Vorlastwert ist daher eine Eigenschaft der Waage während der Wägung.
Waagencharakteristik $y(m_a)$	Funktioneller Zusammenhang zwischen Wägewert und Last bei konstanten Werten von Luftdichte, Luftdruck, Temperatur und Relativer Feuchte.
Wägewert y	Unkorrigiertes Wägeergebnis einer Wägung, dargestellt durch genau den Wert, der nach Aufbringen einer Last in der Anzeige der Waage erzeugt wird.
Wägung	Das Aufbringen einer Last auf den Lastaufnehmer einer Waage verbunden mit der Rückmeldung eines Wägewertes durch die Anzeigeeinheit der Waage
Wägefolge	Nacheinander durchgeführte Wägungen an ein und demselben Objekt
Wägereihe	Nacheinander durchgeführte Wägungen an nicht immer demselben Objekt
Wägezyklus	Kleinsten Teilabschnitt einer Wägereihe, der nach dem Verfahren der Substitution eine Bestimmung der Massewerte der beteiligten Objekte zulässt.
Wägeschema	Darstellung der Struktur einer Wägereihe, an der das Massennormal und die zu kalibrierenden Objekte beteiligt sind.
Wägematrix	Ein Wägeschema, das in Matrixform dargestellt ist.
Zyklenfolge	Nacheinander durchgeführte Wägezyklen. Sie bilden also eine Wägereihe.

Bei jeder Wägung wird durch die *Last*

$$m_a = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)m \quad (2.1-1)$$

ein *Wägewert* y erzeugt. Im Falle einer linearen *Waagencharakteristik* ist der Zusammenhang zwischen Last und Wägewert

$$m_a + m_p = y. \quad (2.1-2)$$

Der *Vorlastwert* m_p ist eine additive Gerätekonstante (siehe Einleitung, Abschnitt 1). Dann lautet die Wägegleichung

$$m \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) + m_p = y. \quad (2.1-3)$$

Zunächst wurde angenommen, dass der Wägewert y ohne Abweichung vom Erwartungswert durch die Wägung wiedergegeben wird. Dies ist jedoch in Wirklichkeit nicht der Fall.

Man muss davon auszugehen, dass jeder Wägewert aufgrund zufälliger Einflüsse auf den Messvorgang vom Erwartungswert abweicht [1], [3], [14], [29]. Hierzu einige Beispiele:

- Zufällige Schwankungen der Auftriebskräfte am Messobjekt und an Komponenten der Waage
- Zufällige Empfindlichkeitsänderungen der Waage aufgrund von Temperaturschwankungen
- Zufällige Masseänderungen des Objekts und der Komponenten der Waage durch Schwankungen der Oberflächenfeuchte
- Zufällige Schwankungen durch thermisches Rauschen elektronischer Elemente
- Zufällige Trägheitskräfte am Messobjekt und am Kraftaufnehmer der Waage aufgrund von Positionsschwankungen der Aufstellfläche des Gerätes
- Zufällige Kräfte am Messobjekt und an den beweglichen Komponenten der Waage aufgrund thermischer Effekte und Strömungsturbulenzen
- Zufällige Schwankungen der Abweichungen des Messzeitpunktes von der Sollzeit
- Abweichungen der Wägewerte aufgrund der Ablesbarkeit beziehungsweise aufgrund digitaler Rundung¹

Die Summe aus diesen Einflüssen führt zu *Typ A – Messunsicherheiten* [8].

Zusätzlich zu diesen statistischen Schwankungen treten systematische Abweichungen auf. Hierzu folgende Beispiele:

- Festpunktabweichung der Waage (Justierfehler)
- Ecklastabweichung der Waage im Falle systematischer Abweichung in der Positionierung der Objekte auf dem Lastaufnehmer (Exzentrizität)
- Unterschiede in den magnetischen Kraftwirkungen auf die verschiedenen Objekte
- Unterschiede in den elektrostatischen Kraftwirkungen auf die verschiedenen Objekte
- Masseänderungen der Objekte durch allmähliche Änderungen der Oberflächenfeuchte
- Wägewertabweichungen, wenn die Masseschwerpunkte der Objekte sich auf unterschiedlichen Höhenniveaus befinden.
- Abweichungen bei der Auftriebskorrektur aufgrund der Unsicherheit der Materialdichten
- Abweichungen bei der Auftriebskorrektur aufgrund von Festpunktabweichungen der Messgeräte, die zur Bestimmung der Luftdichteparameter verwendet werden.
- Abweichungen bei der Auftriebskorrektur durch Einsetzen gemittelter Luftdichtewerte
- Abweichungen zwischen dem angenommenen und dem tatsächlichen (unbekannten) Vorlastwert

Die Auswirkung dieser Unsicherheiten auf die zu bestimmenden Massen ergibt sich aus den Gesetzmäßigkeiten der Fehlerfortpflanzung nach Gauß [9], [11].²

Aus der Wägleichung 2.1-3 geht hervor, dass es bei der Massebestimmung darauf ankommt, die Luftdichte ρ_a , die Materialdichte ρ , die Vorlastwerte m_p und die Wägewerte y möglichst genau zu bestimmen beziehungsweise möglichst genau zu kennen. In der Regel muss man davon ausgehen, dass sich die Luftdichte in einer *Wägereihe* von Wägung zu Wägung ändert. Durch simultane Luftdichtebestimmung können Fehler bei der Auftriebskorrektur reduziert werden, weil in der Wägleichung nicht gemittelte, sondern genau zum Zeitpunkt der Wägung erfasste Luftdichtewerte verrechnet werden können. Die Wägleichung zeigt ferner den Einfluss der Vorlastwerte auf. Bei der Auswertung einer Wägereihe kommt es nach Gleichung 2.1-3 offenbar auf möglichst zutreffende Annahmen zur Entwicklung der Vorlastwerte (*Waagendrift*) an.

Die Typ A – Messunsicherheiten beruhen auf den zufälligen Schwankungen der erfassten Wägewerte Y [8]. Da es sich bei einem Messwert um einen Zahlenwert handelt, wird ein Wägewert zur Unterscheidung von der physikalischen Größe y zukünftig durch den Großbuchstaben Y symbolisiert. Im Falle mehrerer Wägungen wird angenommen, dass die Ergebnisse der Wägungen nach Abzug der systematischen Einflüsse voneinander unabhängig sind. Dies ist die Voraussetzung der statistischen Unabhängigkeit der Wägungen. Sie gilt bei allen Mehrfachwägungen, also in Wägereien, -folgen und -zyklen. Wenn man eine einzelne Wägung herausgreift, ist der Unterschied zwischen dem durch die Messung vorliegenden und dem zu erwartenden Wägewert durch die Wägewertabweichung

¹ Sie können dann als zufällig angesehen werden, wenn die Teilungswerte genügend klein sind.

² Die Varianz der Massewerte ergibt sich aus der Quadratesumme der mit den Empfindlichkeiten multiplizierten Varianzen der Einflussgrößen und Parameter.

$$e = Y - y = Y - \left(m \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) + m_p \right) \quad (2.1-4)$$

beschrieben.

Die aus einer Gesamtheit von Messwerten resultierenden nach dem Prinzip der geringsten Quadrate summierten ausgeglichenen Wägewertabweichungen seien durch $\langle e \rangle$ gekennzeichnet. Nach der gebräuchlichen Terminologie werden Abweichungen nach erfolgtem Ausgleich als Residuum bezeichnet. Entsprechend handelt es sich hier um Residuen der Wägewerte. Wenn bei der oben herausgegriffenen Wägung der Wägewert nach Ausgleich durch $\langle Y \rangle$ symbolisiert wird, gilt für das Residuum

$$\langle e \rangle = Y - \langle Y \rangle \quad (2.1-5)$$

Nach Gleichungen 2.1-4 lautet die Wägeggleichung

$$m \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) + m_p = Y - e. \quad (2.1-6)$$

Nun kennt man aber nicht e , sondern nach Auswertung aller Wägungen das Residuum $\langle e \rangle$. Geht man ferner davon aus, dass aus der Gesamtheit der Wägungen eine beste Schätzung der Masse $\langle m \rangle$ und des Vorlastwertes $\langle m_p \rangle$ resultiert, muss Gleichung 2.1-6 auch für $\langle m \rangle$, $\langle m_p \rangle$ und $\langle e \rangle$ zutreffen. Da man eine Masse und einen Vorlastwert nach erfolgter bester Schätzung nicht besser kennen kann, als die Schätzung ergeben hat, wird in dieser Arbeit allerdings darauf verzichtet, die Größen m und m_p einzuklammern. Somit wird

$$m \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) + m_p = Y - \langle e \rangle. \quad (2.1-7)$$

gesetzt.

2.2 Wägleichungssystem

Zur Massebestimmung wird nach bestimmten Messplänen eine Wägereihe $i = 1, 2, \dots, n_w$ durchgeführt. Dabei handelt es sich in der Regel um mehrere Objekte $j = 1, 2, \dots, n_o$, die nach einem bestimmten *Wägeschema* nacheinander gewogen werden. Im Falle von zwei Objekten sind zum Beispiel die Schemata „*Einfachsubstitution*“ und „*Doppelsubstitution*“ geläufig [29]. Somit sind Massen m_j mit Dichten ρ_j in einer bestimmten Reihenfolge an den *Wägungen* beteiligt. Die Reihenfolge (das Wägeschema) wird durch eine Kennzahl X_{wij} mit folgender Eigenschaft definiert:

$X_{wij} = 1$, wenn in der Messung i das Objekt j gewogen wird.
 $X_{wij} = 0$, wenn in der Messung i ein anderes Objekt als das Objekt j gewogen wird.

Diese Kennzahlen legen also das Wägeschema fest. Da stets nur ein Objekt zur Wägung an der Reihe sein kann, gibt es für jede Messung i nur ein j , bei dem die Kennzahl 1 ist.¹

Die *Last*, die zum Zeitpunkt der Messung i aufliegt, ergibt sich nach Gleichung 2.1-1 aus den Summen

$$m_{ai} = \sum_{j=1}^{n_o} X_{wij} \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_j} \right) m_j \quad (2.2-1a)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n_o} X_{wij} - \rho_{ai} \sum_{j=1}^{n_o} X_{wij} \sum_{k=1}^{n_o} \delta_j^k \rho_k^{-1} \right) m_j. \quad (2.2-1b)$$

Die Luftdichte zum Zeitpunkt der Messung i wird durch ρ_{ai} dargestellt. Aufgrund der Eigenschaft der Kennzahlen X_{wij} ist in jeder dieser Summen jeweils nur ein Summand von 0 verschieden. In der auf der rechten Seite der Gleichung durchgeführten Umformung bedeutet

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \dots & j = k \\ 0 & \dots & j \neq k \end{cases} \quad (2.2-2)$$

das bekannte Kronecker-Symbol. Diese Umformung wird von Nutzen sein, wenn man das Gleichungssystem mit Hilfe von Matrizen darstellen möchte (siehe Gleichung 2.2.6).

Zum Zeitpunkt der Wägung i liegen ferner der *Vorlastwert* m_{pi} , der erfasste *Wägewert* Y_i und die *Wägewertabweichung* $\langle e_i \rangle$ vor. Aufgrund der *Waagendrift* muss davon ausgegangen werden, dass sich der Vorlastwert mit der Zeit ändert. Zu jedem Zeitpunkt einer Wägung gilt nach 2.1-7 eine *Wägleichung*

$$m_{ai} + m_{pi} = Y_i - \langle e_i \rangle. \quad (2.2-3)$$

Zur besseren Übersicht werden der *Lastvektor* \mathbf{m}_a , der *Vorlastvektor* \mathbf{m}_p , der *Wägewertvektor* \mathbf{Y} , der *Massevektor* \mathbf{m} und der *Abweichungsvektor* $\langle \mathbf{e} \rangle$ eingeführt.² Die Kennzahlen X_{wij} bilden die *Schemamatrix* \mathbf{X}_w . Die Luftdichten werden als diagonale Luftdichtematrix \mathbf{P}_a und die Materialdichten als diagonale Materialdichtematrix \mathbf{P} dargestellt³. Dann lautet das System der Wägleichungen

¹ Bei Wägungen in Verbindung mit der Darstellung von Masseskalen werden einzelne Objekte nach einem bestimmten Schema zu Objektgruppen zusammengefasst. In diesem Fall steht j für die Objektgruppe, deren effektive Dichte sich aus der Gesamtmasse und dem Gesamtvolumen der Gruppe errechnet [12], [27], [29].

² Matrizen und Vektoren werden zur besseren Unterscheidung **fett und kursiv** dargestellt. Skalare physikalische Größen und mathematische Variable werden in der Regel in *kursiv* dargestellt. Zahlenwerte und Symbole für gegebene Zahlenwerte werden in Normalschrift geschrieben.

³ Das verwendete Zeichen \mathbf{P} ist ein groß geschriebenes griechisches ρ . Es ist nicht mit einem \mathbf{P} in der Schrift Arial zu verwechseln.

$$\mathbf{m}_a + \mathbf{m}_p = \mathbf{Y} - \langle \mathbf{e} \rangle. \quad (2.2-4)$$

Der Lastvektor ergibt sich gemäß der rechten Seite der Gleichung 2.2-1 aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{m}_a = (\mathbf{X}_w - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m}. \quad (2.2-5)$$

In zusammengefasster Form lautet die Wägeggleichung nun

$$(\mathbf{X}_w - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m} + \mathbf{m}_p = \mathbf{Y} - \langle \mathbf{e} \rangle. \quad (2.2-6)$$

Die zeitliche Änderung der Last ergibt sich nach diesem Gleichungssystem aus dem Auftriebsterm, dessen zeitliche Änderung durch die Komponenten der Luftdichtematrix \mathbf{P}_a geprägt ist. Die Waagendrift folgt aus den Änderungen der Komponenten des Vorlastwertvektors \mathbf{m}_p . Das Gleichungssystem ist daher so ausgelegt, dass zwischen den zeitlichen Änderungen der Last und der Waagendrift klar unterschieden wird.

Mit diesem Wägeggleichungssystem sollen schließlich die unbekannten Massen der zu kalibrierenden Objekte bestimmt werden. Zunächst ist zu analysieren, ob das Gleichungssystem dazu ausreicht.

Als gegebene Größen sind anzusehen:

- Die Schemamatrix, wenn der Messplan bekannt ist.
- Die Luftdichtematrix, wenn zu jedem Zeitpunkt einer Wägung simultan die Luftdichte gemessen wird.
- Die Materialdichtematrix, wenn das Material der einzelnen Objekte hinreichend bekannt ist.
- Der Wägewertvektor, also die bei den Wägungen erfassten Messwerte für die jeweilige Objektmasse.
- Der Massewert des Bezugsnormals, als Voraussetzung dafür, dass die Massen der übrigen Objekte bestimmt werden können.¹

Die Unbekannten sind:

- Die Komponenten des Massevektors, die nicht das Bezugsnormal darstellen.
- Der Vorlastvektor, dessen Komponenten aufgrund der Waagendrift von Messwert zu Messwert unterschiedlich sein können.
- Der Abweichungsvektor (Residuenvektor), denn bei jedem erfassten Wägewert ist mit einer Abweichung zum Erwartungswert zu rechnen.

Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit nach einem Verfahren, den Vorlastvektor zu bestimmen (siehe Kapitel 3). Ferner dürfen die Ergebnisse nicht vom Abweichungsvektor abhängen (siehe Kapitel 5).

Im Rahmen einer weiteren Vereinfachung in der Darstellung der Gleichungen werden das Wägeschema und die Komponenten der Auftriebskorrektur durch Anfügen einer Einheitsmatrix, gekennzeichnet durch \mathbf{I} , erweitert. Die Ergänzung mit der Einheitsmatrix ist die *Wägematrix*

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_w - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mid \mathbf{I}]. \quad (2.2-7)$$

Sie besteht aus n_w Zeilen und $n_o + n_w$ Spalten. Ferner werden der *Massevektor* und der *Vorlastvektor* zum erweiterten Massevektor

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{m}_p \end{bmatrix} \quad (2.2-8)$$

¹ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die erste Komponente des Massevektors das Bezugsnormal darstellen.

zusammengefügt. Er besteht aus $n_o + n_w$ Komponenten. Die Wägegleichungen sind dann auf die einfache Form

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{Y} - \langle \mathbf{e} \rangle \quad (2.2-9)$$

gebracht. Die erste Komponente des erweiterten Massevektors wird vorläufig ebenfalls wie die anderen Komponenten mathematisch als unbekannt behandelt. Jedoch muss man dann das System der Wägegleichungen durch die Bedingung

$$\mathbf{x}_1\mathbf{M} = m_R \quad (2.2-10)$$

ergänzen. In dieser Gleichung wird der ersten Komponente des Massevektors der Massewert m_R des Bezugsnormals zugeschrieben. Der Vektor \mathbf{x}_k ist ein Einheitsvektor aus $n_o + n_w$ Komponenten. Er besteht aus einer 1 an k -ter Stelle, alle anderen Komponenten sind 0:

$$\mathbf{x}_k = [0 \dots 0 \mid 1 \mid 0 \dots 0] \quad (2.2-11)$$

3 Vorlastgleichungen

3.1 Waagendrift

Physikalische Einflüsse auf die Bauelemente einer Wägeeinrichtung bewirken im Falle hoch auflösender Waagen Änderungen des *Vorlastwertes*. Die zeitliche Änderung

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} \quad \text{für} \quad t_0 < t < t_1 \quad (3.1-1)$$

des Vorlastwertes sei die Definition der *Waagendrift* innerhalb des interessierenden Zeitintervalls zwischen einem Anfangszeitpunkt t_0 und einem Endzeitpunkt t_1 .

Es wird davon ausgegangen, dass der Luftdruck, die Temperatur und die Relative Feuchte Einflussparameter der Waage sind. Durch diese Parameter ist auch die Luftdichte bestimmt. Ferner ist auch die Luftdichte direkt ein Einflussparameter der Waage. Daraus ist zu schließen, dass die Waagendrift und die zeitlichen Änderungen der Lastwerte, beziehungsweise der Luftdichte miteinander korrelieren. Für den Benutzer ist nicht die *Drift*, sondern nur das sichtbar, was die *Wägewerte* wiedergeben. Eine Drift lässt sich höchstens an den Wägewerten vermuten, die im Zuge einer *Wägereihe* für ein bestimmtes Objekt erfasst werden. Zur Verdeutlichung sei der Idealfall einer Waage betrachtet, die trotz Änderungen der Luftdichteparameter nicht driftet. Dann wären die Änderungen der Wägewerte proportional den Änderungen der Luftdichte.

Durch Differenzierung der *Wägeggleichung* 2.1-3 nach der Zeit ergibt sich

$$\dot{y} = -\frac{m}{\rho} \frac{d\rho_a}{dt} - \dot{m}_p. \quad (3.1-2)$$

Eine solche Gleichung liegt im Falle einer Wägereihe für jede *Wägung* vor. Zur Bestimmung der Waagendrift ist die Gleichung jedoch kaum von praktischem Nutzen. Dies hat folgende Gründe:

- Es liegt nicht eine durchgängig anwendbare Driftgleichung vor, sondern ein Gleichungssystem, das die gesamte Stichprobe an Wägewerten umfasst. Die Wägewerte entwickeln sich nicht gleichmäßig von Messung zu Messung weiter, sondern jedes Mal, wenn ein anderes Objekt aufliegt, ergeben sich entsprechend der Massedifferenzen größere „Sprünge“.
- Die Wägewerte als diskrete Ergebnisse einer Stichprobe weichen von ihren (für uns unbekannten) Erwartungswerten relativ stark und zufällig ab. Dies wirkt sich noch verstärkt auf die Wägewertänderungen aus, so dass auf diese Weise keine Rückschlüsse auf die Waagendrift möglich sein dürften.
- Die Messwerte für die simultan anliegende Luftdichte weichen ebenfalls von ihren Erwartungswerten ab.
- Die Massen beziehungsweise die Volumina der zu kalibrierenden Objekte sind unbekannt.

Aus diesen Gründen soll ein anderer Ansatz gewählt werden. Zunächst sind die verschiedenen zeitlichen Verläufe durch diskrete Werte zu definieren, die jeweils zu den Zeitpunkten der Wägung gelten. Dabei ist es erforderlich, dass stets die Wägeggleichung in Form des in Abschnitt 2.2 beschriebenen Gleichungssystems erfüllt ist. Danach sind für die Vorlastwerte bei aufeinander folgenden Wägungen Annahmen hinsichtlich ihrer Weiterentwicklung zu treffen.

3.2 Driftgleichungssystem

Da die Komponenten des *Vorlastvektors* im Wägegleichungssystem als unbekannte Größen erscheinen, gibt es zusätzlich zu den $n_o - 1$ zu bestimmenden Massewerten noch n_w unbekannte *Vorlastwerte*. Zur Lösung der *Wägegleichungen* ist es daher erforderlich, weitere Gleichungen als Nebenbedingungen einzuführen, um schließlich ein Gesamtsystem mit einer genügend großen Anzahl von Gleichungen zu erhalten, das lösbar ist. Die aufzustellenden Nebenbedingungen müssen die Vorlastwerte betreffen.

Aufeinander folgende *Wägewerte* hängen auch nach Abzug der Einflüsse des Auftriebs an den Objekten genau dann miteinander zusammen, wenn zwischen den zugehörigen Vorlastwerten bestimmte Beziehungen bestehen. Diese Beziehungen stellen einen Gleichungssatz dar, der unter anderem die Veränderungen der Vorlastwerte definiert und sie somit mathematisch aneinander koppelt. Jedoch die in Beziehungen eingebundenen Vorlastwerte entstammen nicht unbedingt nur einem einzigen *Wägezyklus* (siehe Abschnitt 2.1). Dies ist eine Frage des Driftmodells, welches die Beziehungen zwischen den Vorlastwerten einer Wägereihe definieren soll:

- Entsprechend der Definition des Wägezyklus in 2.1 muss zwischen den Vorlastwerten innerhalb eines *Zyklus* stets ein physikalischer und somit auch mathematischer Zusammenhang bestehen.
- Darüber hinaus können je nach Driftmodell zwischen aufeinander folgenden Zyklen Bindungen durch Vorlastwerte bestehen, zum Beispiel kann ein Vorlastwert aus einem Zyklus einem Vorlastwert aus einem anderen Zyklus gleichgesetzt werden.

Beziehungen zwischen Vorlastwerten sind dann zu definieren, wenn die zugehörigen Wägungen in einem zeitlichen Zusammenhang stehen, das heißt wenn sie demselben *Beobachtungszeitraum* angehören. Daher liegt die Zeitspanne für einen Wägezyklus stets innerhalb eines Beobachtungszeitraumes. Innerhalb eines Beobachtungszeitraumes können mehrere Zyklen liegen. Der kleinste mögliche Beobachtungszeitraum ist ein Wägezyklus. Natürlich können mehrere Beobachtungszeiträume aneinandergereiht sein, dann sind aber Vorlastwerte aus verschiedenen Zeiträumen voneinander unabhängig. Aus all diesen Gründen sollte darauf Wert gelegt werden, die Folge der Anfangspunkte und Endpunkte sowohl der Zyklen als auch der Beobachtungsräume klar festzulegen. Dies geschieht entlang der Zeitachse, die so gestaltet sei, dass die aufeinander folgenden Wägungen in der Reihenfolge der einzelnen Beobachtungen und zeitlich geordnet nach Beobachtungszeiträumen beziehungsweise Zyklen in gleichen Abständen aufeinander folgend dargestellt und fortlaufend nummeriert sind. Somit gibt es entlang der Zeitachse eine Folge von Anfangs- und Endpunkten, die geeignet zu markieren sind. Sei nun k die Nummerierung der insgesamt n_t Zeitintervalle. Der Zähler i lege die Wägungen entsprechend ihrer Reihenfolge fest. Wägungen, die dem Zeitintervall k zugehören beginnen mit dem Zähler i_{0k} und enden mit dem Zähler i_{1k} . Für diese Selektion gilt:

$$1 \leq i_{0k} \leq i \leq i_{1k} \leq n_w \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n_t. \quad (3.2-1)$$

Da Beziehungen zwischen Vorlastwerten deren Veränderungen beinhalten, kann man auch von *Driftbeziehungen* sprechen. Zwischen folgenden Fällen ist zu unterscheiden:

- In einem Beobachtungszeitraum bestehen zwischen allen Änderungen aufeinander folgender Vorlastwerte mathematische Beziehungen. Dann handelt es sich um eine durchgehende Driftbindung. Ein Beispiel wäre die durchgehend lineare Drift.
- Zwischen nicht allen Änderungen von Vorlastwerten besteht eine mathematische Beziehung. Dann ist die Driftbindung nicht durchgehend. Ein Beispiel wäre eine partiell lineare Drift.

Zur Aufstellung einer Driftbeziehung muss der betreffende Zeitraum mindestens drei Vorlastwerte beinhalten. Es bedarf also mindestens zweier Driftwerte. Die Darstellung von zum Beispiel einer *Driftänderung* setzt also mindestens 3 Messpunkte voraus. Es gilt demnach stets

$$i_{0k} + 2 \leq i_{1k} \quad (3.2-2)$$

Die folgende Abbildung zeigt Beispiele.

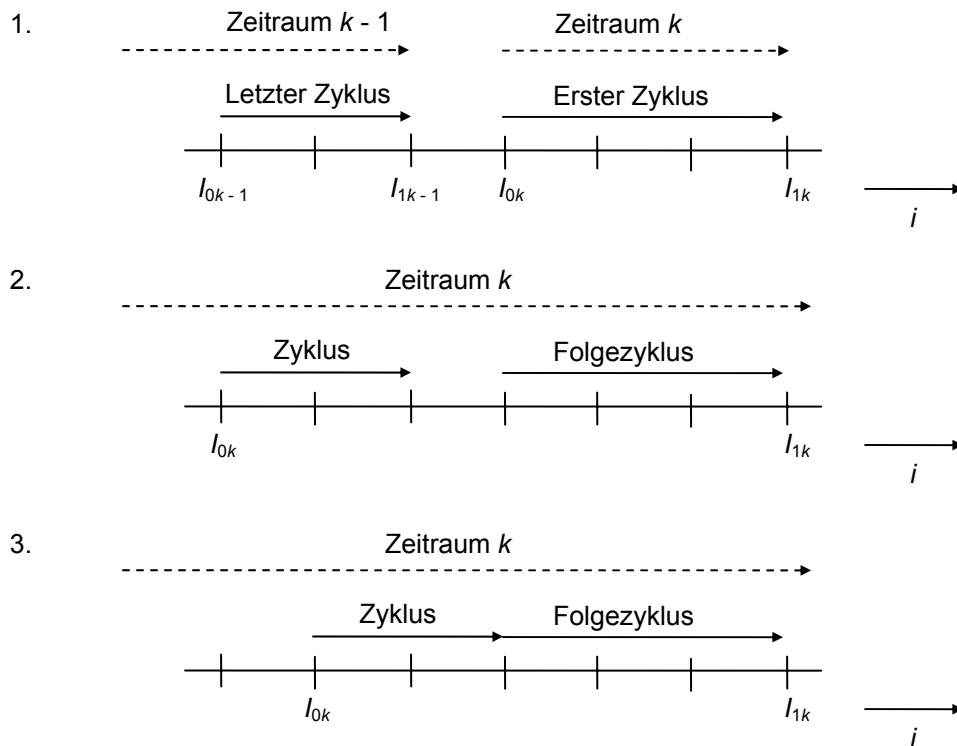


Abb. 3.2-1: Beispiele für Zyklen und Beobachtungszeiträume

Es bestehen folgende Alternativen:

1. Ein neuer Zyklus beginnt mit einer neuen Wägung. Zwischen den Zyklen gibt es keine Driftbindung. In diesem Falle sind die Wägeergebnisse aus den aufeinander folgenden Zyklen unkorreliert. Die neue Wägung gehört einem neuen Beobachtungszeitraum an (Abb. 3.2-1 Fall 1).
2. Ein neuer Zyklus beginnt zwar mit einer neuen Wägung, aber zwischen den Zyklen gibt es eine Driftbindung. Dann sind die Wägungen miteinander korreliert. Die Wägungen gehören demselben Beobachtungszeitraum an (Abb. 3.2-1 Fall 2).
3. Ein neuer Zyklus (innerhalb eines Beobachtungszeitraumes) beginnt dann, wenn der vorangehende endet. In diesem Falle wird in den beiden aufeinander folgenden Zyklen auf einen gemeinsamen Wägewert zurückgegriffen. Die sich aus den Zyklen ergebenden Wägeergebnisse sind korreliert (Abb. 3.2-1 Fall 3).

Diese Möglichkeiten werden durch die Bedingung

$$i_{1k-1} \leq i_{0k} \leq i_{1k-1} + 1 \quad (3.2-3)$$

abgedeckt.

Innerhalb eines jeden Zyklus ist die Änderung des Vorlastwertes durch den Quotient aus den Vorlastdifferenzen und den zugehörigen Zeitspannen Δt gegeben.

$$\dot{m}_{pi} = \frac{m_{pi+1} - m_{pi}}{\Delta t} \quad (3.2-4)$$

Dies entspricht der *Waagendrift* im betreffenden Zeitintervall. In der Abb. 3.2-2 ist ein Beispiel für den Vorlastwert gezeigt. Die Zeitspanne Δt zwischen aufeinander folgenden Wägungen ist in diesem Falle stets als gleich angesetzt.¹

Die zeitliche Änderung der Waagendrift ist der Quotient aus den Driftdifferenzen und den Zeitspannen Δt gemäß

$$\ddot{m}_{pi} = \frac{\dot{m}_{pi+1} - \dot{m}_{pi}}{\Delta t} \quad (3.2-5a)$$

$$= \frac{E_{i+1}}{(\Delta t)^2} . \quad (3.2-5b)$$

Die Größe E_{i+1} stellt die *Driftänderung* dar. Durch die Definition der Driftänderung E in dieser diskreten Form entfallen die Zeitintervalle Δt , wie sich durch Anwenden der Driftdefinition nach Gleichung 3.2-4 zeigt. Die Driftänderungen ergeben sich nun aus den einzelnen Vorlastwerten zu

$$E_{i+1} = m_{pi+2} - 2m_{pi+1} + m_{pi} . \quad (3.2-6)$$

Je nach Driftmodell ist dies ein System aus $1 \leq n_d \leq n_w - 2$ Gleichungen für die Vorlastwerte, bei denen als neue n_d Unbekannte die Driftänderungen in Erscheinung treten. Für den Fall, dass $n_d = n_w - 2$ ist, handelt es sich bei der Wägereihe um einen einzigen Beobachtungszeitraum und eine durchgehend lineare Driftbindung.

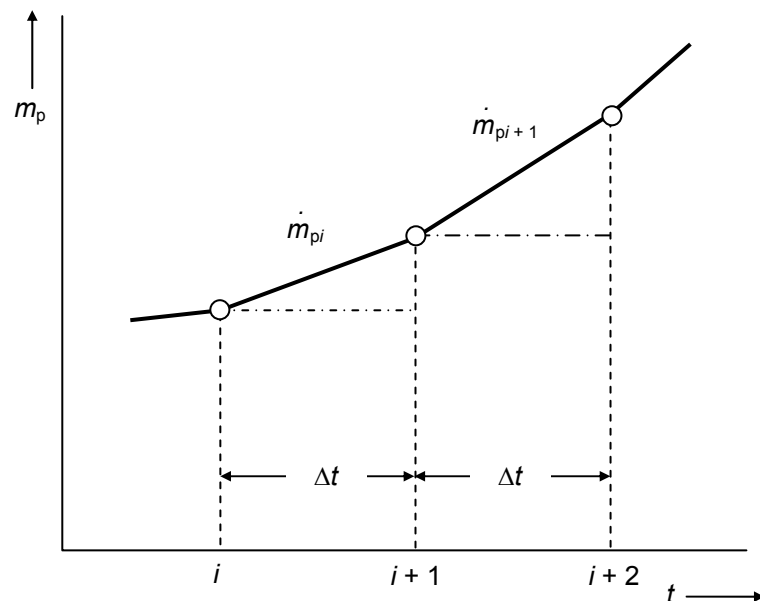


Abb. 3.2-2: Ausschnitt aus einer Folge sich ändernder Vorlastwerte

Die *Wägeggleichungen* werden um die Gesamtheit der oben definierten Driftgleichungen ergänzt. Das Gleichungssystem für die Vorlastwerte in Matrixdarstellung lautet

$$\mathbf{X}_d \mathbf{m}_p = \mathbf{E} . \quad (3.2-7)$$

Entsprechend ihrer Wirkung wird die Matrix \mathbf{X}_d als *Driftänderungsmatrix* bezeichnet. Angewandt auf den Vorlastvektor \mathbf{m}_p , stellt sie den *Driftänderungsvektor* \mathbf{E} dar. Aus der Definition des

¹ In der Praxis könnte natürlich auch von unterschiedlichen Zeitintervallen ausgegangen werden. Dann müssten sie aber gemessen werden, damit man die Änderungen der Vorlastwerte auf gleiche Zeitspannen umrechnen kann.

Driftänderungsvektors ergibt sich die Struktur der Driftänderungsmatrix für einen Abschnitt linearer *Driftbindung* zu

$$\mathbf{X}_d = \begin{bmatrix} \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \end{bmatrix} . \quad (3.2-8)$$

Im Vergleich zur allgemeinen Form der Wägleichungen nach 2.2-9, die für den erweiterten *Massevektor* \mathbf{M} nach Gleichung 2.2-8 gilt, bezieht sich die Gleichung 3.2-7 nur auf den Vorlastvektor \mathbf{m}_p , der bestimmte Komponenten des erweiterten Massevektors darstellt. Zweckmäßiger Weise wird die Driftgleichung 3.2-7 nun so erweitert, dass sie die Objektmassen in das Gleichungssystem mit einbezieht. Zu diesem Zwecke wird die Driftänderungsmatrix um so viele Nullvektoren als Spalten erweitert, wie es Objekte gibt:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0} \mid \mathbf{X}_d] \quad (3.2-9)$$

Diese so erweiterte „*Driftmatrix*“ \mathbf{D} besteht somit aus n_d Zeilen und wie die Wägematrix \mathbf{X} aus $n_0 + n_w$ Spalten (siehe Gleichung 2.2-7). Sie wirkt auf den erweiterten Massevektor \mathbf{M} gemäß

$$\mathbf{DM} = \mathbf{E} , \quad (3.2-10)$$

um den Driftänderungsvektor \mathbf{E} darzustellen.¹

¹ Mathematisch gesehen, braucht \mathbf{D} an dieser Stelle überhaupt noch nicht festgelegt zu werden. Selbst die ersten Spalten könnten auch ungleich Null sein. Dies wäre der Fall, wenn durch Änderungen der Einflussparameter, zum Beispiel der relativen Feuchte aufgrund der Oberflächeneffekte an den Massenormalen auch Masseänderungen berücksichtigt werden sollen [28].

3.3 Driftmodelle

Die folgenden Beispiele zeigen Möglichkeiten der Realisierung der allgemein im vorangehenden Abschnitt behandelten *Driftmatrix* auf.

Von praktischer Bedeutung sind folgende Fälle:

- Je Zyklus wird die *Drift* konstant gesetzt. Es gibt also keine *Driftänderungen*. Dann ist der *Driftänderungsvektor* $\mathbf{E} = 0$.
- Je Zyklus wird die Driftänderung an den tatsächlichen (noch unbekannten) Verlauf der *Vorlastwerte* angepasst. Die angepassten Driftänderungen werden durch $\langle \mathbf{E} \rangle$ gekennzeichnet.
- Auf unabhängige Art und Weise wurden die Driftänderungen bestimmt. Ihre Werte stellen im Driftmodell feste Driftänderungsparameter dar. Als Parameter werden zum Beispiel die Temperatur T , die relative Luftfeuchte h und die Luftdichte ρ_a zugrunde gelegt. Es werden also die Driftänderungen $\mathbf{E} = \mathbf{E}(T, h, \rho_a)$ berechnet und in die Driftgleichung 3.2-10 eingesetzt.

Unabhängig davon, welcher dieser Fälle nun ausgeführt werden soll, sind noch die Zyklen und das Driftmodell festzulegen.

Dazu werden nachstehend folgende Beispiele behandelt:

- Eine durchgehend lineare *Driftbindung*, die alle Messpunkte umfasst
- Eine Folge von Zyklen mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkten, die jeweils drei Messpunkte überdecken
- Eine Folge von unabhängigen Zyklen, die jeweils vier Messpunkte überdecken

Zur graphischen Darstellung wird der Einfachheit halber jeweils nur der Fall konstanter Drift gewählt. Das entspricht also dem Fall $\mathbf{E} = 0$. Später, in Kapitel 5.3, wird der Vektor der Driftänderungen nicht mehr fest an 0 (oder an einen anderen gegebenen Wert) gebunden. Während also der Driftänderungsvektor hier noch als unfrei behandelt wird, wird er dann ein freier, justierbarer Parameter sein. Das wird, unabhängig von den nachstehend dargestellten Driftmodellen, zu einer deutlich verbesserten Anpassung an die tatsächlichen Driftverläufe führen.

3.3.1 Durchgehend konstante Drift

Für $\mathbf{E} = 0$ ist die Drift durchgehend konstant. Die Möglichkeit der Anpassung an den tatsächlichen Driftverlauf ist also gering. Daher ist in der Regel mit größeren Standardabweichungen und Korrelationen zwischen den Wägewerten zu rechnen, denn die tatsächlichen Werte können vom linearen Verlauf stark abweichen

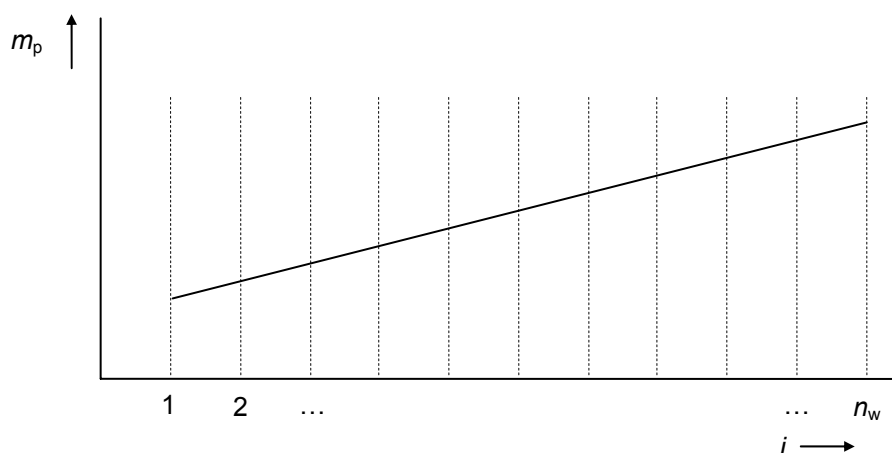


Abb. 3.3-1: Vorlastwerte im Falle einer durchgehend konstanten Drift

Die Driftmatrix hat die folgende Struktur:

$$D = \begin{bmatrix} | & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . \end{bmatrix} \quad (3.3-1)$$

3.3.2 Zyklen über je 3 Messpunkte

Für $E = 0$ ist die Drift partiell konstant. Das folgende Beispiel zeigt den Fall, dass der letzte Messpunkt eines jeden Zyklus der erste Messpunkt des jeweiligen Folgezyklus ist (siehe Abb. 3.2-1, Fall 3). Mit diesem Modell kann der Driftverlauf auch für $E = 0$ relativ gut dargestellt werden. Jedoch bestehen zwischen den Zyklen Korrelationen. Aus diesem Grunde wird dieses Driftmodell aus statistischen Gründen mit Vorsicht zu behandeln sein.

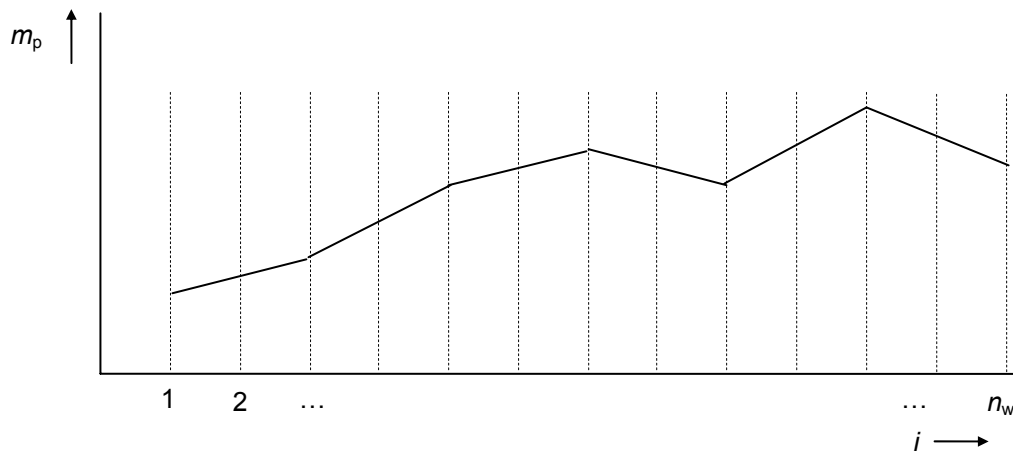


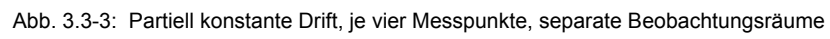
Abb. 3.3-2: Partiiell konstante Drift, ein Beobachtungszeitraum

Die Driftmatrix ist für dieses Modell

$$D = \begin{bmatrix} | & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

3.3.3 Unabhängige Zyklen über je 4 Messpunkte

Für $E = 0$ ist die Drift jeweils über 4 Messpunkte partiell konstant. Das folgende Beispiel zeigt den besonderen Fall, dass die *Beobachtungszeiträume* voneinander separiert sind. Es gibt also weder gemeinsame Anfangs- und Endpunkte wie im vorherigen Beispiel, noch eine Driftbindung zwischen den Zyklen (siehe Abb. 3.2-1, Fall 1). Zwischen den Zyklen gibt es daher keine Korrelationen. Die Verwendung dieses Modells bietet sich besonders auch dann an, wenn Messfolgen, die zu unterschiedlichen Zeiten ermittelt wurden, geschlossen ausgewertet werden sollen.


$$D = \begin{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . \end{array} \right] \end{matrix}. \quad (3.3-3)$$

4 Konventionelle Substitutionsmethoden

4.1 Einfachsubstitution

Die bisher aufgestellten Wäge- und Driftgleichungen sollten die bekannten Verfahren der Einfach- und *Doppelsubstitution* wiedergeben. Um dies zu prüfen, wird zunächst im vorliegenden Abschnitt die *Einfachsubstitution* behandelt. Die Zahl der Objekte ist also $n_o = 2$.

Bei der klassischen *Substitutionswägung* wird die Luftdichte als mittlere Dichte je *Zyklus* oder als mittlere Dichte für die gesamte *Wägereihe* verwendet. Man setzt also voraus, dass sich die Luftdichte während eines Zyklus oder insgesamt wenig ändert. Letzterer Fall soll betrachtet werden. Die mittlere Luftdichte errechnet sich aus dem arithmetischen Mittel der Zyklenmittel. Die Matrix der Luftdichte ist im Rahmen dieser Näherung

$$\mathbf{P}_a = \bar{\rho}_a \mathbf{I} . \quad (4.1-1)$$

Hierbei ist

$$\bar{\rho}_a = \frac{1}{n_w} \sum_{i=1}^{n_w} \rho_{ai} \quad (4.1-2)$$

die mittlere Luftdichte.

Bei der einfachen Substitution mit zwei Objekten verläuft der Wechsel zwischen Normal N und Prüfling P nach dem *Wägeschema* N P N P N P N ... [6]. Es gilt die *Schemamatrix*

$$\mathbf{X}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} . \quad (4.1-3)$$

Sie ist Bestandteil der Wägegleichung 2.2-6. Um die Forderung nach Driftelimination zu erfüllen, wird die Wägegleichung mit der *Driftänderungsmatrix* \mathbf{X}_d multipliziert:

$$\mathbf{X}_d (\mathbf{X}_w - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m} - \mathbf{X}_d \mathbf{m}_p = \mathbf{X}_d \mathbf{Y} - \mathbf{X}_d \mathbf{e} . \quad (4.1-4)$$

Die einzelnen Terme dieser Gleichung werden jetzt weiter ausgeführt:

Nach Gleichung 3.2-7 gilt für verschwindende *Driftänderungen* \mathbf{E} die Driftgleichung

$$\mathbf{X}_d \mathbf{m}_p = 0 . \quad (4.1-5)$$

Der *Vorlastvektor* ist auf diese Weise eliminiert. Die Vorlastwerte spielen also keine Rolle mehr. Die Multiplikation der Driftänderungsmatrix mit der Schemamatrix ergibt nach den Gleichungen 3.3-2 und 4.1-3

$$\mathbf{X}_d \mathbf{X}_w \mathbf{m} = -2(m_p - m_N) \mathbf{d} . \quad (4.1-6)$$

Hierbei ist \mathbf{d} ein n_d – dimensionaler Vektor mit allen Elementen gleich 1. Der Term 4.1-6 besteht aus den Differenzen zwischen der Masse m_p des Prüflings und der Masse m_N des Normals. Auf ähnliche Weise ergibt sich für den Auftriebsterm

$$\bar{\rho}_a \mathbf{X}_d \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{m} = -2 \bar{\rho}_a \left(\frac{m_P}{\rho_P} - \frac{m_N}{\rho_N} \right) \mathbf{d}, \quad (4.1-7)$$

mit den Materialdichten ρ_P des Prüflings und ρ_N des Normals. Auf der rechten Seite der Wägleichung erhält man

$$\mathbf{X}_d \mathbf{Y} = -2 \Delta \mathbf{Y}. \quad (4.1-8)$$

Hierbei ist $\Delta \mathbf{Y}$ der Vektor der *Zyklusdifferenzen*. Er besteht aus den Komponenten

$$\Delta Y_k = Y_{2k} - \frac{1}{2}(Y_{2k-1} + Y_{2k+1}). \quad (4.1-9)$$

für $k = 1, \dots, n_d$. Sie stellen die bekannten Wägewertdifferenzen der Einfachsubstitution dar. Offenbar beträgt die Anzahl der Zyklusdifferenzen

$$n_d = \frac{1}{2}(n_w - 1). \quad (4.1-10)$$

Auf der rechten Seite der Wägleichung erhält man ferner

$$\mathbf{X}_d \mathbf{e} = -2 \Delta \mathbf{e}. \quad (4.1-11)$$

Hierbei sind

$$\Delta \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{2k} - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{2k-1} + \mathbf{e}_{2k+1}) \quad (4.1-12)$$

die Abweichungen der Zyklusdifferenzen.

Wenn man Gleichung 4.1-4 mit dem transponierten Vektor von \mathbf{d} multipliziert, erhält man sein Betragsquadrat. Es ist gleich der Anzahl der Driftgleichungen:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = n_d. \quad (4.1-13)$$

Aus den Gleichungen 4.1-5 bis 4.1-13 ergibt sich für die Wägleichung

$$m_P \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_P} \right) - m_N \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_N} \right) = \bar{\Delta Y} + \bar{\Delta e}. \quad (4.1-14)$$

Der Mittelwert der Zyklusdifferenzen ist

$$\bar{\Delta Y} = \frac{1}{n_d} \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{Y} \quad (4.1-15a)$$

$$= \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \Delta Y_k \quad (4.1-15b)$$

Der Mittelwert der Abweichungen der Zyklusdifferenzen ist entsprechend

$$\bar{\Delta e} = \frac{1}{n_d} \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{e} \quad (4.1-16a)$$

$$= \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \Delta e_k \rightarrow 0 \quad (4.1-16b)$$

Dieser Mittelwert wird zu 0 geschätzt, da der Erwartungswert jeder Abweichung e_i entsprechend der Voraussetzung zufälliger Ereignisse gleich 0 ist. Also ist der Lastunterschied durch

$$m_P \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_P} \right) - m_N \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_N} \right) = \overline{\Delta Y} . \quad (4.1-17)$$

gegeben. Nach Umstellung dieser Gleichung auf konventionelle Wägewerte erhält man die bekannte Kalibriergleichung für den Prüfling [1], [3], [29].

4.2 Gewichtung von Einfachsubstitutionsfolgen

Die Lösungsformel 4.1-17 der Substitutionswägung bei zwei Objekten enthält als Ergebnis der Wägungen die mittlere Wägewertdifferenz nach 4.1-15. Durch Multiplikation mit der Driftänderungsmatrix \mathbf{X}_d wurde in Gleichung 4.1-4 das Wägleichungssystem auf die Driftbeziehungen je Zyklus N P N zugeschnitten. Es verbleiben n_d Gleichungen. Diese Gleichungen sind bisher als gleich gewichtet angesehen worden. Für alle Zyklen N P N wurde also ein Gewichtungsfaktor 1 verwendet. Es ist aber genau so gut möglich, die einzelnen Wägleichungen je Zyklus unterschiedlich zu gewichten. Es wird sich zeigen, dass dies immer dann interessant ist, wenn wie bei der *Einfachsubstitution* unterschiedliche Zyklusdifferenzen gleiche Wägewerte enthalten, das heißt wenn Korrelationen auftreten (siehe 3.3.1 und 3.3.2). Aus diesen Gründen soll hier dargestellt werden, wie eine *Gewichtung* durchgeführt werden kann.

Zu diesem Zwecke wird eine diagonale *Gewichtungsmatrix* \mathbf{W}_d der Dimension n_d eingeführt. Sie soll die Eigenschaft haben, dass die Summe der Diagonalelemente gleich 1 ist. Dies lässt sich durch die Normierungsgleichung

$$\mathbf{d}^T \mathbf{W}_d \mathbf{d} = 1. \quad (4.2-1)$$

darstellen. Die Normierungsgleichung tritt an Stelle von Gleichung 4.1-13.

Wenn man das Wägleichungssystem 4.1-4 mit der Gewichtungsmatrix multipliziert, erhält man das gewichtete Gleichungssystem

$$\mathbf{W}_d \mathbf{X}_d (\mathbf{X}_w - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m} - \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d \mathbf{m}_p = \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d \mathbf{Y} - \mathbf{W}_d \mathbf{X}_d \mathbf{e}. \quad (4.2-2)$$

Entsprechend sind die Gleichungen 4.1-6 bis 4.1-8 mit der Gewichtungsmatrix zu multiplizieren. Zur Herleitung der *Kalibrierformel* verfährt man wie in Abschnitt 4.1 und erhält unter Berücksichtigung von 4.2-1 für die gewichtete mittlere Zyklusdifferenz die Gleichung

$$\overline{\Delta Y} = \sum_{k=1}^{n_d} w_{dk} \Delta Y_k. \quad (4.2-3)$$

Bei der Mittelung von Zyklusdifferenzen lassen die Gleichungssysteme also auch Gewichtungen zu. Üblicherweise hat man bisher ohne Gewichtung gearbeitet. Für den idealen Fall, dass die Wägewerte den Erwartungswerten entsprechen, also keine Abweichungen zu erwarten sind, spielt die Wahl der Gewichtung keine Rolle. Da man aber stets bei den Wägewerten von statistisch streuenden Zufallsvariablen ausgehen muss, hängt die Wahl der Gewichtung mit der Frage der gleichwertigen Behandlung der einzelnen statistischen Ereignisse zusammen. Unter diesem Gesichtspunkt wird sich die Frage stellen, ob eine bestimmte Gewichtung zu bevorzugen ist. Dies wird zu einem späteren Zeitpunkt beantwortet (siehe die Abschnitte 4.5 und 5.2.3). Im Idealfall verschwindender Abweichungen, kann man jedoch die Erwartungswerte zugrunde legen.

Wenn der Erwartungswert

$$\overline{\Delta y} = \sum_{k=1}^{n_d} w_{dk} \Delta y_k \quad (4.2-4)$$

der mittleren Zyklusdifferenz durch die Erwartungswerte

$$\Delta y_k = y_{2k} - \frac{1}{2}(y_{2k-1} + y_{2k+1}) \quad (4.2-5)$$

der Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution definiert ist, ist für jede Wahl der Gewichtung

$$m_p \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_p} \right) - m_n \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\rho_n} \right) = \overline{\Delta y}. \quad (4.2-6)$$

die Bestimmungsgleichung der Masse des zu kalibrierenden Objektes (siehe die Gleichungen 4.1-14 bis 4.1-17).

4.3 Doppelsubstitution

Bei der doppelten *Substitution* mit zwei Objekten verläuft der Wechsel zwischen Normal N und Prüfling P nach dem Wägeschema N P P N N P P N N P P N Es gilt die *Schemamatrix*

$$\mathbf{X}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.3-1)$$

Die Herleitung der Kalibrierformel entspricht derjenigen in Abschnitt 4.1. Die Luftdichte wird hier ähnlich wie in 4.1 über die gesamte Wägereihe gemittelt. Dazu kann man je N P P N – Zyklus jeweils die Luftdichte beziehungsweise Luftdichteparameter mitteln. Die Wägewertdifferenzen je Zyklus ergeben sich zu

$$\Delta Y_k = \frac{1}{2}(Y_{4k-2} + Y_{4k-1}) - \frac{1}{2}(Y_{4k-3} + Y_{4k}), \quad (4.3-2)$$

mit $k = 1, 2, \dots, n_d$. Insgesamt erhält man an *Driftbeziehungen*

$$n_d = \frac{1}{4} n_w. \quad (4.3-3)$$

Der Mittelwert ergibt sich wie bei 4.1-15. Sollten unterschiedliche Waagen unterschiedlicher Wiederholbarkeit zum Einsatz kommen, kann man je Zyklus unterschiedliche Gewichtungen verwenden. In diesem Falle würde Gleichung 4.2-3 zur Anwendung kommen. Der Gewichtungsfaktor sollte umgekehrt proportional der Langzeit-Standardabweichung gewählt werden.

4.4 Verallgemeinerte Substitutionsprozeduren bei zwei Objekten

In den Abschnitten 4.1 und 4.3 wurden die Verfahren der *Einfach-* und *Doppelsubstitution* auf die *Wägleichung* 2.2-6 und die *Driftgleichung* 3.2-7 zurückgeführt. Diese Verfahren sollen der Vollständigkeit halber jetzt noch allgemeiner behandelt werden. Zunächst seien die Voraussetzungen zusammengefasst:

- Je *Zyklus* verändern sich die *Vorlastwerte* linear. Dies waren zum Beispiel auch die grundlegenden Annahmen bei der Einfach- und Doppelsubstitution.
- An der Wägereihe seien zwei Objekte beteiligt (N und P). Auf eine Ausweitung auf mehr als zwei Objekte soll also auch hier verzichtet werden.
- Jeder Zyklus enthalte Wägewerte für beide Objekte. Diese selbstverständliche Annahme wurde schon bei der Definition des Zyklus gemacht.
- Für mindestens eines der Objekte liegen je Zyklus mindestens 2 Wägewerte vor. Auch diese Festlegung leuchtet unmittelbar ein, weil sonst keine Information über die Drift der Vorlastwerte gegeben ist.
- Während der gesamten Wägereihe soll sich der Auftrieb an den Objekten nicht ändern. Diese einschränkende Festlegung wird erst zu einem späteren Zeitpunkt fallen gelassen.
- Der letzte Wägewert eines Zyklus kann sich als ersten Wägewert des Folgezyklus wiederholen. An diesem Messpunkt wäre die Wägereihe dann zusammenhängend.
- Grundsätzlich können beliebige Zyklen zusammenhängend oder unabhängig voneinander aufeinander folgen.
- Jeder Zyklus wird durch bestimmte untereinander zusammenhängende Driftgleichungen beschrieben.

Sei $j = 1, 2, \dots, n_z$ die laufende Nummer der aneinander gereihten Wägezyklen. Die Zyklen j sind durch n_{zj} Driftgleichungen festgelegt. Die Gesamtheit aller Driftgleichungen bildet die *Driftmatrix* \mathbf{X}_d . Sie besteht also aus

$$n_d = \sum_{j=1}^{n_z} n_{zj} \quad (4.4-1)$$

Zeilen. Die Driftkonstanz innerhalb jedes Zyklus kommt dadurch zum Ausdruck, dass die Anzahl der Wägewerte, die zu einem Zyklus gehören, $n_{zj} + 2$ beträgt. Zum Beispiel sind mindestens zwei Laständerungen, also drei *Wägungen* für Driftkonstanz erforderlich. Die Gesamtzahl der Wägewerte sei wie vor gleich n . Offenbar ist

$$n \leq \sum_{j=1}^{n_z} (n_{zj} + 2) \quad (4.4-2)$$

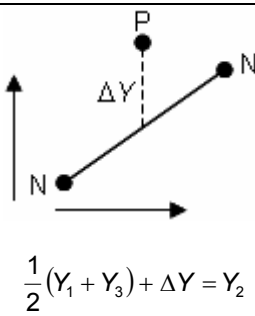
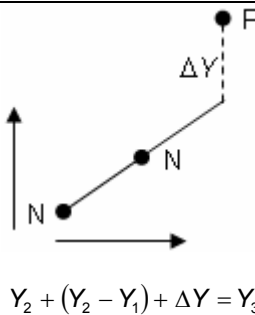
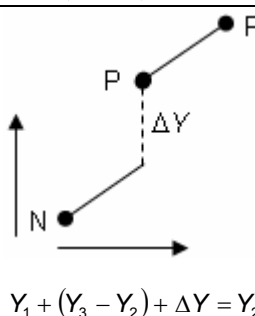
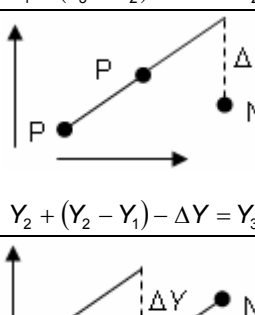
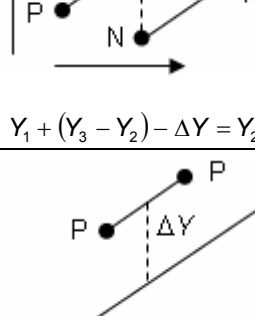
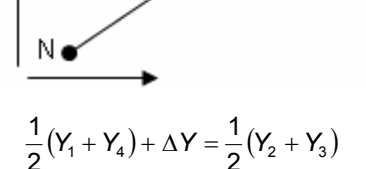
Falls das Gleichheitszeichen gilt, sind alle Zyklen voneinander unabhängig (keine Korrelationen). Andernfalls, wenn die Gesamtzahl der Wägewerte geringer ist, liegen Abhängigkeiten vor. Dieser Fall wird im Folgeabschnitt, bei dem es um die *Gewichtung* der Wägezyklen geht, eine besondere Rolle spielen.

Die Abfolge der Wägungen ist wieder durch die zweisepaltige *Schemamatrix* \mathbf{X}_w gegeben. Sie entspricht zum Beispiel der Gleichung 4.1-3, wobei jetzt die Elemente 0 und 1 „beliebig“ verteilt sein können. Die Driftabhängigkeiten der Wägungen werden wieder durch die *Driftmatrix* \mathbf{X}_d dargestellt. Die Zeilen der Driftmatrix haben stets die Struktur 0 ... 0 1 -2 1 0 ... 0. Im Falle beliebiger Arten von Substitutionszyklen wird zusätzlich noch eine *Zyklusmatrix* \mathbf{X}_z eingeführt, die für die einzelnen Zyklen die Berechnung der Zyklusdifferenzen festlegt. Sei $\Delta \mathbf{Y}$ der Vektor der Wägewertdifferenzen. Dann ist \mathbf{X}_z so gestaltet, dass

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{X}_z \mathbf{Y} \quad (4.4-3)$$

gilt.

Beispiele:

Zyklus	Herleitung	Zyklusdifferenz	Bestandteile von X_z
N P N	 $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_3) + \Delta Y = Y_2$	$\Delta Y = Y_2 - \frac{1}{2}(Y_1 + Y_3)$	$-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}$
N N P	 $Y_2 + (Y_2 - Y_1) + \Delta Y = Y_3$	$\Delta Y = Y_1 - 2Y_2 + Y_3$	$1 \quad -2 \quad 1$
N P P	 $Y_1 + (Y_3 - Y_2) + \Delta Y = Y_2$	$\Delta Y = -Y_1 + 2Y_2 - Y_3$	$-1 \quad +2 \quad -1$
P P N	 $Y_2 + (Y_2 - Y_1) - \Delta Y = Y_3$	$\Delta Y = -Y_1 + 2Y_2 - Y_3$	$-1 \quad 2 \quad -1$
P N N	 $Y_1 + (Y_3 - Y_2) - \Delta Y = Y_2$	$\Delta Y = Y_1 - 2Y_2 + Y_3$	$1 \quad -2 \quad 1$
N P P N	 $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) + \Delta Y = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3)$	$\Delta Y = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3) - \frac{1}{2}(Y_1 + Y_4)$	$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

P N N P	$\frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) - \Delta Y = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3)$	$\Delta Y = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) - \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3)$	$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$
N N P P	$Y_2 + \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1) + \Delta Y = Y_3 - \frac{1}{2}(Y_4 - Y_3)$	$\Delta Y = \frac{1}{2}(3Y_3 - Y_4) - \frac{1}{2}(3Y_2 - Y_1)$	$\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}$
P P N N	$Y_2 + \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1) - \Delta Y = Y_3 - \frac{1}{2}(Y_4 - Y_3)$	$\Delta Y = \frac{1}{2}(3Y_2 - Y_1) - \frac{1}{2}(3Y_3 - Y_4)$	$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$

Im Falle einer zweizyklischen Wägereihe bestehend aus den Zyklen N P N und N P P N und nur einem *Beobachtungszeitraum* ist das Gesamtschema N P N P P N. Zwischen den beiden Zyklen gibt es also eine Korrelation, weil das zweite Element N das letzte Element des ersten Zyklus und das erste Element des zweiten Zyklus ist. Die Driftänderungsmatrix ist in diesem Fall

$$\mathbf{X}_d = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4-4)$$

Die Zyklusmatrix ergibt sich aus der ersten und sechsten Zeile der Tabelle zu

$$\mathbf{X}_z = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.4-5)$$

Zur Herleitung der *Kalibrierformel* unter den oben genannten Voraussetzungen geht man ähnlich vor, wie in Abschnitt 4.1 für die Einfachsubstitution beschrieben. Jedoch wird die Wägegleichung 2.2-6 mit \mathbf{X}_z multipliziert¹. Anstelle von Gleichung 4.1-5 gilt jetzt

$$\mathbf{X}_z \mathbf{m}_p = 0. \quad (4.4-6)$$

Im Übrigen verläuft die Herleitung ganz entsprechend, so dass sich schließlich 4.1-17 ergibt. Bei der mittleren Wägewertdifferenz stellt sich allerdings noch die Frage nach der besten *Gewichtung* der einzelnen Zyklusdifferenzen. Das Problem wurde bereits in Abschnitt 4.2 für die Einfachsubstitution angeschnitten. Im folgenden Abschnitt wird die Gewichtung für beliebige Substitutionsprozeduren ausführlich behandelt.

¹ In Abschnitt 4.1 war es nicht notwendig zwischen \mathbf{X}_d und \mathbf{X}_z zu unterscheiden, weil im Falle der Einfachsubstitution $\mathbf{X}_d = -2 \mathbf{X}_z$ ist.

4.5 Beste Gewichtung von Substitutionszyklen

Es soll jetzt in einem heuristischen Ansatz die beste Schätzung der *Varianz* von Lastwertdifferenzen erarbeitet werden. Die Substitutionszyklen seien dabei ganz beliebig gestaltet, so dass die Darstellung der *Zyklen* von Abschnitt 4.4 übernommen werden kann. Im Übrigen gelten auch die dortigen Voraussetzungen.

Die bisherigen Gleichungen haben eine *Gewichtung* der *Zyklusdifferenzen* ΔY zugelassen, denn sie konnten mit beliebigen Faktoren multipliziert werden. Für den Anwender stellt sich die Frage, welche Gewichtungsfaktoren am besten zu verwenden ist, um die mittlere Zyklusdifferenz zu berechnen. Dazu werden diejenigen Gewichtungsfaktoren gesucht, bei denen die Varianz der Lastwertdifferenz am geringsten ist. Diese Zielsetzung soll unter vereinfachten Voraussetzungen erreicht werden. Später muss also noch eine allgemeine theoretische Herleitung folgen (siehe die Abschnitte 5.1 und 5.3).

Zur Berechnung der mittleren Zyklusdifferenzen geht man von Gleichung 4.4-3 aus, welche über die *Zyklusmatrix* \mathbf{X}_z den linearen Zusammenhang zwischen dem Vektor der Zyklusdifferenzen und dem Vektor der *Wägewerte* herstellt. In Vektorschreibweise ist die mittlere Zyklusdifferenz

$$\overline{\Delta y}_\alpha = \alpha^\top \Delta \mathbf{y} . \quad (4.5-1)$$

Für die Wägewerte und deren Differenzen ist in diesem Abschnitt die Verwendung der Erwartungswerte zweckmäßig. Der *Gewichtungsvektor* α ist normiert in der Form

$$\alpha^\top \mathbf{d}_z = 1 . \quad (4.5-2)$$

Dabei ist \mathbf{d}_z ein Vektor der Dimension von α mit den Elementen 1.

Der nun einzubringende Ansatz beruht auf der Vorstellung, dass bei der Mittelwertbildung der Zyklusdifferenzen eine Gewichtung so erfolgen soll, dass die sich ergebende Varianz ein Minimum ist. Derjenige Gewichtungsvektor, der diese Forderung erfüllt, sei \mathbf{w}_z . Da die Luftdichte als konstant vorausgesetzt wurde, gilt für die Erwartungswerte nach den Gleichungen 4.2-6 und 4.4-3

$$m_p \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p} \right)_\alpha - m_n \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_n} \right) = \overline{\Delta y}_\alpha \quad (4.5-3a)$$

$$= \alpha^\top \mathbf{X}_z \mathbf{y} . \quad (4.5-3b)$$

Der Erwartungswert der Differenz der Lastwerte auf der linken Seite von 4.5-3a beziehungsweise die mittlere Zyklusdifferenz auf der rechten Seite seien durch die Funktion

$$f_\alpha(\mathbf{y}) = \alpha^\top \mathbf{X}_z \mathbf{y} \quad (4.5-4)$$

dargestellt.

Um für die Lastwertdifferenzen die geringste Varianz aufzufinden, werden nun kleine Änderungen des Wägewertvektors zugelassen, die dann kleine Änderungen des Funktionswertes von f_α bewirken. Die Änderungen seien durch das lineare Differentialformsymbol d , die zugehörigen Varianzen durch das Symbol d^2 symbolisiert. Für jeden Gewichtungsvektor α gilt also

$$d^2 f_\alpha = \alpha^\top \mathbf{X}_z d\mathbf{y} d\mathbf{y}^\top \mathbf{X}_z^\top \alpha . \quad (4.5-5)$$

Da die Abweichungen der Wägewerte von ihren Erwartungswerten als zufällig vorausgesetzt wurden, liefert $d\mathbf{y} d\mathbf{y}^\top$ eine Diagonalmatrix mit gleich großen Diagonalelementen $(dy)^2$, welche die Varianz der Wägewerte darstellen. Dann ist

$$d^2 f_\alpha = \alpha^\top \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^\top \alpha (dy)^2 . \quad (4.5-6)$$

Die Varianz $(dy)^2$ möge einem festen Wert entsprechen, der die zufälligen Schwankungen der Wägewerte darstellt. Dann hängt der Wert von $d^2 f_{\alpha}$ allein vom Vektor α ab. Der Wert kann natürlich nicht 0 sein, weil dann die Normierungsbedingung 4.5-2 verletzt wäre. Es ergibt sich die Forderung nach einem Minimum des quadratischen Ausdrucks $\alpha^T \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T \alpha$ unter Einhaltung der Normierung als Nebenbedingung, damit die triviale Lösung 0 ausgeschlossen ist.

Zum Auffinden des Extremwertes unter Berücksichtigung der Nebenbedingung wird die Multiplikatorenmethode von Lagrange benutzt [9]. Dazu definiert man die Funktion

$$F(\alpha, \lambda) = \alpha^T \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T \alpha + ((\mathbf{d}_z^T \alpha - 1) + (\alpha^T \mathbf{d}_z - 1))\lambda. \quad (4.5-7)$$

Unter der Annahme, dass es einen Wertesatz von α gibt, bei dem sowohl die Nebenbedingung als auch die Extremwertbedingung erfüllt ist, ist $F(\alpha, \lambda)$ für jeden Wert von λ ein Minimum. Außerdem ist die Ableitung von F nach λ gleich 0, wenn die Nebenbedingung erfüllt ist. Daraus ergibt sich die notwendige Bedingung, dass der Gradient der Funktion F verschwinden muss. Also gelten

$$\left. \frac{\partial F(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{w}_z} = 2\mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T \mathbf{w}_z + 2\mathbf{d}_z \lambda = 0, \quad (4.5-8)$$

$$\left. \frac{\partial F(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\mathbf{w}_z} = (\mathbf{d}_z^T \mathbf{w}_z - 1) + (\mathbf{w}_z^T \mathbf{d}_z - 1) = 0. \quad (4.5-9)$$

Hieraus entsteht das gesuchte Gleichungssystem für die besten Gewichtungsfaktoren. In zusammengefasster Schreibweise erhält man

$$(\mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T)_e \mathbf{w}_{ze} = \mathbf{x}_{n_z+1}^T, \quad (4.5-10)$$

mit der expandierten normalisierten transponierten Zyklusmatrix

$$(\mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T)_e = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T & \mathbf{d}_z \\ \mathbf{d}_z^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5-11)$$

dem expandierten Gewichtungsvektor

$$\mathbf{w}_{ze} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.5-12)$$

und dem Vektor \mathbf{x}_{n_z+1} . Bis auf das letzte Element sind die Elemente dieses Vektors 0. Das letzte Element ist 1.

Falls nun die Determinante der expandierten Zyklusmatrix von 0 verschieden ist, kann die Matrixinverse gebildet und Gleichung 4.5-10 nach \mathbf{w}_z aufgelöst werden. Ist die Determinante 0, so gibt es keine Lösung. In diesem Falle war die Ausgangsmatrix nicht sachgerecht. Es ergibt sich schließlich die Bestimmungsgleichung für die Gewichtung der Wägezyklen zu

$$\mathbf{w}_{ze} = (\mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T)_e^{-1} \mathbf{x}_{n_z+1}^T. \quad (4.5-13)$$

Da der Wert des Lagrange – Multiplikators für das Endergebnis keine Rolle spielt, ist die Dimension des Gewichtungsvektors um 1 zu reduzieren. Dazu multipliziert man die Seiten der Gleichung 4.5-13 von links mit der um eine Nullspalte erweiterten Einheitsmatrix

$$\mathbf{I}_z = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]. \quad (4.5-14)$$

Dann ist

$$\mathbf{w}_z = \mathbf{I}_z (\mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^T)_e^{-1} \mathbf{x}_{n_z+1}^T. \quad (4.5-15)$$

Mit der Gleichung 4.5-15 ist folgendes erreicht:

Der als Wägereihe aufgenommene Massevergleich mit beliebigen und beliebig aneinander gereihten Zyklen ist verwertbar, indem man aus den Zyklusdifferenzen und den Gewichtungen \mathbf{w}_z die mittlere Zyklusdifferenz bestimmt. Die Differenz der Lastwerte ist

$$m_p \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p} \right) - m_N \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_N} \right) = \overline{\Delta y} = \mathbf{h}_z^T \mathbf{y} . \quad (4.5-16)$$

Die den Wägewerten zugeordneten Koeffizienten sind durch den Lösungsvektor

$$\mathbf{h}_z^T = \mathbf{x}_{n_z+1} (\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)^{-1} \mathbf{l}_z^T \mathbf{x}_z . \quad (4.5-17)$$

festgelegt.

Zum Abschluss dieser Betrachtung soll noch die Standardunsicherheit der mittleren Zyklusdifferenz auf die Standardabweichung der Wägewerte zurückgeführt werden. Nach Gleichung 4.5-16 ist

$$d^2 \overline{\Delta y} = \mathbf{h}_z^T \mathbf{h}_z (dy)^2 . \quad (4.5-18)$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang her zwischen der Standardunsicherheit u der mittleren Zyklusdifferenz und der Standardabweichung s beziehungsweise der Wiederholbarkeit der Wägungen:

$$u^2(\overline{\Delta Y}) = \mathbf{h}_z^T \mathbf{h}_z s^2 . \quad (4.5-19)$$

4.5.1 Beispiel Einfachsubstitution

Einige Beispiele findet man im Anhang unter 9.3. In 9.3.1 werden die Gewichtungen der *Zyklusdifferenzen* der *Einfachsubstitution* berechnet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle Tab 4.5–1 dargestellt. Der Wert der letzten Komponente des Gewichtungsvektors hat dabei keine Bedeutung, während die anderen Komponenten die Gewichtungen sind, die dem Prinzip der geringsten Varianz der Lastwert- beziehungsweise Zyklusdifferenzen genügen. Es ist offensichtlich notwendig, die bisherige Praxis der Gleichbehandlung der Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution zu revidieren. Allerdings sollte die hier vorgenommene heuristische Herleitung auf eine allgemeine Basis gestellt werden (siehe insbesondere die Abschnitte 5.1 und 5.3). Es sei ferner angemerkt, dass das hier eingesetzte Extremwertverfahren auf beliebige aneinander gereihete Zyklen angewandt werden kann (siehe Abschnitt 4.4). Beispiele sind im Anhang unter 9.3.2 ausgeführt.

n_z	$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$	\mathbf{w}_{ze}^T
2	$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[1/2 \quad 1/2 \mid -7/8]$
3	$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 & 0 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[5/14 \quad 2/7 \quad 5/14 \mid 17/28]$

4	$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 3/2 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[3/11 \quad 5/22 \quad 5/22 \quad 3/11 \mid -41/88]$
5	$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 3/2 & 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/2 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[29/131 \quad 24/131 \quad 25/131 \quad 24/131 \quad 29/131 \mid -99/262]$

Tab. 4.5-1: Gewichtungsvektoren bei der Einfachsubstitution

5 Lösung der Gleichungssysteme

5.1 Unfreie Driftänderungen

In diesem Abschnitt wird die allgemeine Lösung der *Wäge-* und *Driftgleichungen* unter folgendem Ansatz erarbeitet:

- Die Driftänderungen seien fest vorgegeben (unfrei)
- Die Driftänderungen seien alle gleich Null (verschwindend)
- Die Folge der Objekte und damit das Wägeschema sei beliebig¹
- Die Beobachtungszeiträume und Zyklen seien ebenfalls beliebig²
- Die Auftriebsterme werden simultan mit jeder Wägung verrechnet. Es werden also keine Mittelwerte gebildet wie bei den herkömmlichen *Substitutionswägungen*.

Unter diesem Ansatz besteht nun die Aufgabe, die unbekannten Massen zu bestimmen. Da es bei jeder Wägung auch einen unbekannten *Vorlastwert* gibt, umfasst die Lösung sowohl die Massen als auch die Vorlastwerte, also alle Komponenten des *erweiterten Massevektors*.

Als Lösungsmethode wird das Prinzip der geringsten Summe der Fehlerquadrate angewandt [11]. In diesem Falle handelt es sich um das Prinzip der geringsten Quadrate der Wägewertabweichungen (LD)³, wie es häufig in der Massemetrologie zum Einsatz kommt [12]. Das Besondere dabei ist hier, dass die linearen Driftmodelle als Nebenbedingung zu berücksichtigen sind.

Mathematisch wird also folgendes Prinzip realisiert:

Der erweiterte Massevektor in Gleichung 2.2-9 wird mit seinen $n_w + n_o$ Komponenten zunächst als variabel angesehen, jedoch durch Nebenbedingungen eingeschränkt, denn es müssen die *Driftbeziehungen* 3.2-10 erfüllt sein und eines der Objekte muss gemäß 2.2-10 dem Normal entsprechen. Die Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen ist dann eine Funktion des erweiterten Massevektors. Für einen bestimmten Massevektor nimmt die Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen einen kleinsten Wert an. Dieser Massevektor stellt die gesuchte Lösung dar. Die Bedingung lautet also:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} \rightarrow \min \quad (5.1-1)$$

Wenn ein Minimum vorliegt, sind die Wägewertabweichungen ausgeglichen. Die ausgeglichenen Wägewertabweichungen bilden den Vektor der Residuen. Dies soll durch Klammern $\langle \rangle$ symbolisiert werden:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} \rightarrow \langle \mathbf{e} \rangle^T \langle \mathbf{e} \rangle \quad (5.1-2)$$

Zur Darstellung des Minimums führt man an Stelle von \mathbf{M} den variablen erweiterten Massevektor β ein, der dann, wenn die Minimum-Bedingung erfüllt ist, den gesuchten erweiterten Massevektor \mathbf{M} wiedergeben soll:⁴

$$\beta \rightarrow \mathbf{M} \quad (5.1-3)$$

Somit ergibt sich nach 2.2-9, 2.2-10 und 3.2-10 ein Gesamtsystem an Gleichungen mit den folgenden Bestandteilen:

$$\text{Wägleichung:} \quad \mathbf{X}\beta = \mathbf{Y} - \mathbf{e}(\beta) \quad (5.1-4a)$$

$$\text{Differenzielle Form:} \quad \mathbf{X}d\beta = -d\mathbf{e}(\beta) \quad (5.1-4b)$$

¹ Selbstverständlich muss das Wägeschema mathematisch sinnvoll gewählt werden, so dass eine Lösung der Gleichungssysteme existiert.

² Auch die Festlegung der Beobachtungszeiträume und Zyklen muss mathematisch sinnvoll sein. Unstimmigkeiten dürften in der Praxis nur dann auftreten, wenn man die Abläufe der Praxis falsch in ein Driftmodell überträgt.

³ Least deviations (LD)

⁴ Im Falle der Darstellung von Vektorvariablen mit griechischen Symbolen wird die Schrift „Symbol, fett, kursiv“ verwendet.

$$\begin{array}{ll}
\text{Nebenbedingung Bezugsmasse:} & \mathbf{x}_1 \boldsymbol{\beta} = m_R \quad (5.1-4c) \\
\text{Nebenbedingung Drift:} & \mathbf{D} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{E} \quad (5.1-4d) \\
\text{Minimum-Bedingung:} & \frac{\partial (\mathbf{e}^T \mathbf{e})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{d} \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (5.1-4e)
\end{array}$$

Die Minimum-Bedingung ergänzt also die bisher aufgestellten Wägleichungen und die Nebenbedingungen. Die *Driftänderungen* \mathbf{E} können später 0 gesetzt werden. Zunächst soll noch der allgemeine Fall mit festem Driftänderungsvektor betrachtet werden. Dieses System an Gleichungen ist jetzt zu lösen.

Durch Multiplikation mit dem transponierten erweiterten Wägematrix wird die Gauß-Transformation der erweiterten Wägematrix durchgeführt [9], [11], [15]. Dadurch entsteht die Normalform

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{e}(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.1-5)$$

der Wägleichung. Sie hat den Vorteil, dass der erweiterte Massevektor mit einer symmetrischen Matrix, der Normalmatrix, multipliziert wird. Das Gleichungssystem 5.1-5 ist jedoch unvollständig, da die Nebenbedingungen nicht eingehen. Deshalb ist die Determinante der Normalmatrix 0, so dass eine Invertierung ohne die Anwendung weiterer Gleichungen für den Wägewertvektor noch nicht möglich ist. Dies könnte an konkreten Beispielen gezeigt werden. Es müssen also auch die übrigen Gleichungen von 5.1-4 in den Lösungsweg eingearbeitet werden.

Dies geschieht auf folgende Weise:

Zur Lösung des Gleichungssystems in der Normalform soll das Verfahren von Lagrange angewandt werden [9], [13]. Dazu wird die Lagrange-Funktion

$$L(\boldsymbol{\beta}_e) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda (\mathbf{x}_1 \boldsymbol{\beta} - m_R) + (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_1^T - m_R) \lambda + \lambda^T (\mathbf{D} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D}^T - \mathbf{E}^T) \lambda \quad (5.1-6)$$

definiert. Sie wird als Funktion des um die Komponenten der Lagrange-Multiplikatoren λ und λ *expandierten Massevektors* $\boldsymbol{\beta}_e$ aufgefasst:

$$\boldsymbol{\beta}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.1-7)$$

Es gilt folgende notwendige und hinreichende Bedingung: Die Summe der Quadrate $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ der Wägewertabweichungen ist ein Minimum und die Nebenbedingungen sind eingehalten genau dann, wenn beliebige Gradienten

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} = 0 \quad (5.1-8)$$

der Lagrange-Funktion L gleich 0 sind.¹

Diese Bedingung der geringsten Abweichungsquadrate wird jetzt genutzt, um die Lösungsformel darzustellen. Zu diesem Zwecke wird zunächst das Differential der Quadratesumme der

¹ Die notwendige Bedingung wird folgendermaßen deutlich:

Wenn die Quadratesumme der Wägewertabweichungen bei erfüllten Nebenbedingungen und festen Lagrange-Multiplikatoren ein Minimum ist, ist es auch die Lagrange-Funktion, denn alle Nebenbedingungen liefern die Identität Null. Variationen der Lagrange-Multiplikatoren bei festem Massevektor führen aufgrund der Nebenbedingungen zu keinen Änderungen von L . Der Gradient ist also im Vektorraum des erweiterten Massevektors 0.

Die hinreichende Bedingung ergibt sich folgendermaßen:

Wenn beliebige kleine Änderungen der Multiplikatoren bei jedem festen $\boldsymbol{\beta}$ keine Änderung von L bewirken, müssen die Nebenbedingungen für $\boldsymbol{\beta}$ stets erfüllt sein. Wenn unter Einhaltung der Nebenbedingung $\boldsymbol{\beta}$ variiert wird und sich der Wert der Funktion L dabei nicht ändert, ändert sich auch nicht die Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen. Da diese nie negativ und von quadratischer Ordnung ist, kann sie nur ein Minimum (oder ohne jede Wägewertabweichung identisch Null) sein.

Wägewertabweichungen gebildet: $d(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = (d\mathbf{e}^T) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T d\mathbf{e} = (\mathbf{e}^T d\mathbf{e})^T = (d\mathbf{e}^T) \mathbf{e}$. Unter Anwendung der differentiellen Wägeggleichung in 5.1-4 erhält man daher für das Differential der Wägewertabweichungen $(d\mathbf{e}^T) \mathbf{e} = -2(d\boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{X}^T \mathbf{e}$. Diese Beziehung geht in das vollständige Differential der Lagrange-Funktion ein. Es ergibt sich

$$dL = 2 \left\{ (d\boldsymbol{\beta}^T) \left(-\mathbf{X}^T \mathbf{e} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{x}_1^T \boldsymbol{\lambda} \right) + (d\boldsymbol{\lambda}^T) (\mathbf{D}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}) + (d\boldsymbol{\lambda}) (\mathbf{x}_1 \boldsymbol{\beta} - m_R) \right\}. \quad (5.1-9)$$

An der Stelle des Ausdrucks $\mathbf{X}^T \mathbf{e}$ in der Normalform der Wägeggleichung 5.1-5 kann jetzt der Vektor \mathbf{e} der Wägewertabweichungen eliminiert werden. Dies liefert

$$dL = 2 \left\{ (d\boldsymbol{\beta}^T) \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{x}_1^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \right) + (d\boldsymbol{\lambda}^T) (\mathbf{D}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{E}) + (d\boldsymbol{\lambda}) (\mathbf{x}_1 \boldsymbol{\beta} - m_R) \right\}. \quad (5.1-10)$$

Die Gradientenbildung nach Gleichung 5.1-8 soll übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird mit Hilfe neu definierter Matrizen nachstehend eine Struktur gebildet, die auch zu einer übersichtlichen Handhabung der Lösungsgleichung führen wird. Es handelt sich um folgende Matrix-beziehungsweise Vektorerweiterungen:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{D}^T & \mathbf{x}_1^T \\ \hline \mathbf{D} & & \\ \hline \mathbf{x}_1 & & 0 \end{array} \right] \quad \dots \text{ expandierte Normalmatrix} \quad (5.1-11)$$

$$\mathbf{X}_e^T = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X}^T & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ \hline 0 & & \mathbf{I} \end{array} \right] \quad \dots \text{ expandierte transponierte Wägematrix} \quad (5.1-12)$$

$$\mathbf{Y}_e = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Y} \\ \hline \mathbf{E} \\ \hline m_R \end{array} \right] \quad \dots \text{ expandierter Wägewertvektor} \quad (5.1-13)$$

Der Gradient der Lagrange-Funktion stellt sich nun in der Form

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} = 2 \left((\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e \boldsymbol{\beta}_e - \mathbf{X}_e^T \mathbf{Y}_e \right). \quad (5.1-14)$$

dar.

Zur Erfüllung der Minimum-Bedingung 5.1-8 muss der Gradient verschwinden. Wenn dies der Fall ist, nimmt $\boldsymbol{\beta}_e$ den Wert \mathbf{M}_e an. Daraus ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den expandierten Massevektor zu

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e \mathbf{M}_e = (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{Y}_e. \quad (5.1-15)$$

Der expandierte erweiterte Massevektor

$$\mathbf{M}_e = \left[\begin{array}{c} m \\ \hline m_p \\ \hline \boldsymbol{\lambda} \\ \hline \boldsymbol{\lambda} \end{array} \right] \quad (5.1-16)$$

stellt die vollständige Lösung sowohl für die Masse- als auch die Vorlastwerte dar.

Zur Prüfung, ob das Wägeschema so gewählt wurde, dass eine Lösung überhaupt möglich ist, berechnet man die Determinante der expandierten Normalmatrix. Wenn diese ungleich 0 ist, ergibt sich die Lösung zu

$$\mathbf{M}_e = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{Y}_e \quad (5.1-17)$$

Die Lösungsmatrix ist

$$\mathbf{S} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e. \quad (5.1-18)$$

Auf der linken Seite der Lösungsgleichung stehen die Ergebnisse:

- Die in erster Linie gesuchten Massen der Objekte
- Die ebenfalls gesuchten Vorlastwerte
- Die Lagrange-Multiplikatoren¹

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen alle Eingangsgrößen und -voraussetzungen:

- Das Wägeschema, welches den Ablauf der Wägungen festlegt.
- Die Auftriebsterme mit den Luftdichten und den Materialdichten, integriert im Wägeschema, welche simultan mit jeder Wägung die Auftriebskorrektur ermöglichen.
- Die Wägewerte, welche bei jeder Wägung erfasst und zur Ablesung beziehungsweise zum Ausdruck zur Verfügung gestellt werden.
- Das Driftmodell, welches vorgibt, in welcher Form die Vorlastwerte sich zeitlich entwickeln sollen.
- Die Driftänderungen, die darstellen, wie sich die Drift von Wägung zu Wägung ändert. Gemäß Voraussetzung ist hier für den Driftänderungsvektor $\mathbf{E} = 0$ einzusetzen.
- Die Masse des Bezugsnormals, auf deren Wert sich die Ergebnisse für die Massen der zu kalibrierenden Objekte beziehen.

5.1.1 Schritte zur Berechnung der Massewerte

Es werden jetzt die einzelnen Schritte zusammengestellt, nach denen vorzugehen ist, um im Falle unfreier Driftänderungen Massen zu bestimmen.

Aufbau der expandierten Normalmatrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e$:

- Aufstellung der Schemamatrix \mathbf{X}_w (siehe Kapitel 2).
- Ergänzung der Schemamatrix durch die Auftriebsterme.
- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.1-1 bis 5.1-11.

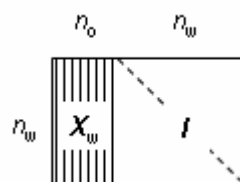


Abb. 5.1-1: Rechtsseitig Erweiterung auf \mathbf{X} durch Anhängen einer Einheitsmatrix \mathbf{I}

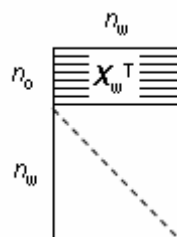


Abb. 5.1-2: Transponieren der erweiterten Wagematrix: \mathbf{X}^T

¹ Die Werte der Lagrange - Multiplikatoren sind in der Regel nicht von weiterführender Bedeutung.

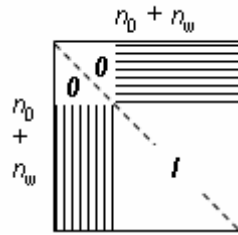


Abb. 5.1-3: Berechnung der normalisierten Wägematrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

- Die sich ergebende Struktur der Normalmatrix überprüfen: Oben links Diagonalmatrix mit n_o Diagonalelementen. Rechts unten Einheitsmatrix \mathbf{I} der Dimension n_w . Rechts oben die Schemamatrix (mit Auftriebskorrektur). Links unten die transponierte Schemamatrix.
- Um die Normalmatrix hinsichtlich der Nebenbedingung Drift zu expandieren, geht man in folgenden Schritten vor:



Abb. 5.1-4: Aufstellung der Vorlastwertbeziehungen \mathbf{X}_d

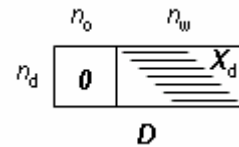


Abb. 5.1-5: Linksseitig Erweiterung auf Driftmatrix \mathbf{D} durch Anfügen einer Nullmatrix $\mathbf{0}$

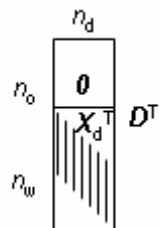


Abb. 5.1-6: Transponieren der Driftmatrix

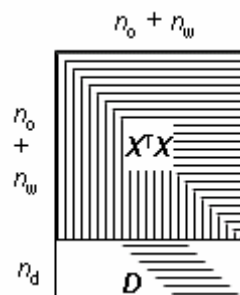


Abb. 5.1-7: Driftmatrix an Normalmatrix unten anhängen

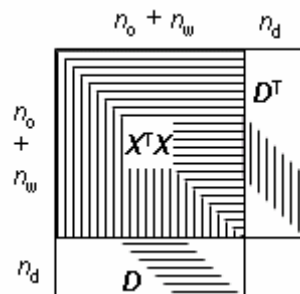


Abb. 5.1-8: Transponierte Driftmatrix oben rechts anhängen

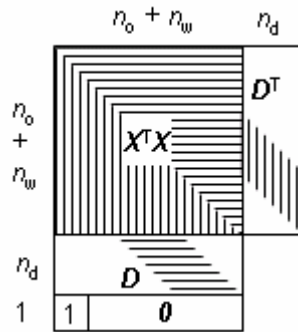


Abb. 5.1-9: Unten Zeile anfügen: 1. Position 1, sonst 0

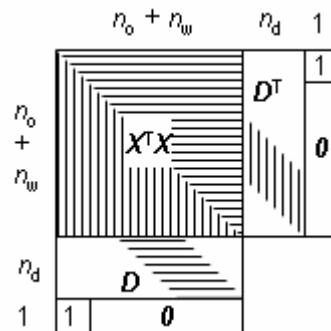


Abb. 5.1-10: Untere Zeile transponieren und oben rechts anfügen

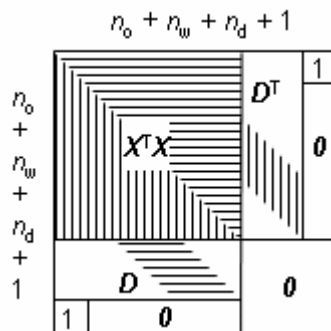


Abb. 5.1-11: Matrix mit Elementen 0 vervollständigen

- Überprüfung durch Bildung der Determinante.

Aufbau der expandierten transponierten Wägematrix \mathbf{X}_e^T :

- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.1-12 und 5.1-14.

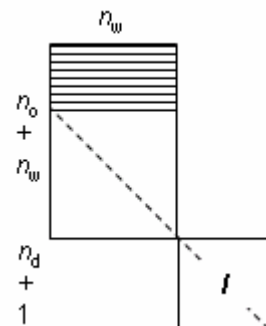


Abb. 5.1-12: Einheitsmatrix an transponierte erweiterte Wägematrix \mathbf{X}_e^T in Diagonalenrichtung anfügen

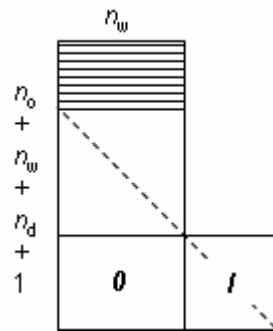


Abb. 5.1-13: Links unten durch Nullmatrix vervollständigen

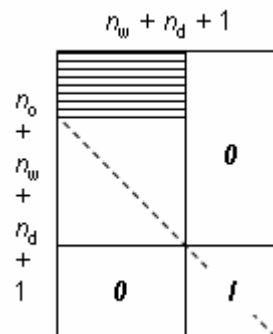


Abb. 5.1-14: Rechts oben durch Nullmatrix vervollständigen: X_e^T

- Prüfen, ob die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten der expandierten Normalmatrix übereinstimmt. Gegebenenfalls korrigieren.

Berechnung der Lösungsmatrix S :

- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.1-15 und 5.1-16.

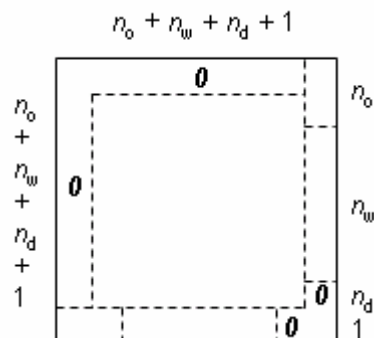


Abb. 5.1-15: Expandierte Normalmatrix invertieren

- Die Invertierte Normalmatrix weist eine typische Struktur mit einem bestimmten Inhalt in den äußeren Zeilen und Spalten auf (siehe Abschnitt 5.4). Struktur und Inhalt überprüfen.

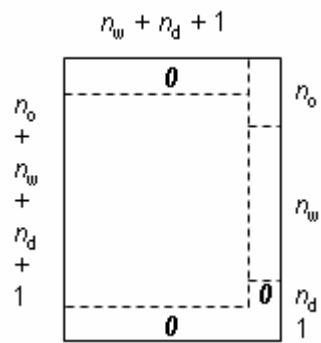


Abb. 5.1-16: Inverse mit der expandierten transponierten Wägematrix \mathbf{X}_e^T multiplizieren

- Dies ist die Lösungsmatrix \mathbf{S} . Sie weist eine typische Struktur mit einem bestimmten Inhalt auf (siehe Abschnitt 5.4). Struktur und Inhalt überprüfen.

Aufbau des expandierten Wägewertvektors:

- In Spaltenform Wägewerte listen.
- Spalte um Elemente 0 expandieren.
- Als letztes Element den Massewert des Normals hinzufügen.
- Gesamtzahl der Elemente mit Spaltenzahl von \mathbf{X}_e^T vergleichen. Gegebenenfalls Anzahl der Nullelemente anpassen.

Massewerte berechnen:

- Lösungsmatrix \mathbf{S} mit expandiertem Wägewertvektor multiplizieren.
- Das erste Element ist der Massewert des Normals.
- Die nächsten Elemente sind die Massewerte der zu kalibrierenden Objekte.
- Entsprechend der Anzahl der Wägewerte sind die dann folgenden Elemente die Vorlastwerte.
- Alle weiteren Elemente des expandierten Massevektors sind nicht von weiterführender Bedeutung.

5.2 Beispiele - unfreie Driftänderungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Driftmodelle als Anwendungsbeispiel für *unfreie Driftänderungen* behandelt. Außerdem werden die an sich unbekannten Driftänderungen auf 0 gesetzt, weil sie stets als klein vorausgesetzt werden. Das bedeutet, dass hier je *Zyklus* von einer streng konstanten Drift ausgegangen werden soll (siehe dazu auch Abschnitt 3.2). Dabei werden in den folgenden Beispielen sowohl unterschiedliche Zyklen als auch unterschiedliche *Wägeschemata* behandelt. Alle nachstehend durchgeführten Beispielrechnungen zur Bestimmung der Lösungsmatrix können mit Hilfe von Excel nachvollzogen werden. Die Excel-Oberflächen sind im Anhang 9.1 wiedergegeben. Der Einfachheit halber sind im Folgenden Auftriebskorrekturen unberücksichtigt geblieben, weil nur die prinzipielle Methodik zur Aufstellung der konkreten Kalibrierformeln dargelegt werden soll. Die Luftdichte wird also Null gesetzt. Alle zusätzlichen Komponenten, die sich durch die Anwendung des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren ergeben, werden in den Lösungsformeln nicht mehr benötigt. Nur die wesentlichen Komponenten betreffend der Masse- und der Vorlastwerte werden also nachstehend dargestellt.

5.2.1 Durchgehend konstante Drift

a) Einfachsubstitution

Als erstes Beispiel für ein lineares Driftmodell mit durchgehender Driftkonstanz wird das Wägeschema der *Einfachsubstitution* mit 2 Zyklen, also $n_w = 5$ *Wägewerten* betrachtet. Die Rechnung findet man im Anhang unter 9.1.1.1. Auf eine ausführliche Darstellung an dieser Stelle wird verzichtet.

Anstelle dessen soll hier als Beispiel der Fall mit $n_w = 7$ Wägungen ausführlicher behandelt werden. Die Rechnung ist im Anhang unter 9.1.1.2 niedergelegt. Die ersten 7 Komponenten des erweiterten *Wägewertvektors* Y_e nach Gleichung 5.1-13 sind die Wägewerte Y . Die nachfolgenden 5 Komponenten sind Null. Die 13., letzte Komponente stellt den Massewert m_R des Bezugsnormals dar.

Die Lösungsmatrix S nach Gleichung 5.1-18 ist in Tabelle 5.2-1 wiedergegeben. Die erste Zeile der Lösungsmatrix ergibt die triviale Identität der Referenzmasse mit sich selbst. Die zweite Zeile liefert die *Kalibrierformel* für das Kalibrierobjekt. Der Inhalt der Spalten 8 bis 12 ist nicht von Interesse, zumal die entsprechenden Komponenten des erweiterten Wägewertvektors hier 0 sind. Die übrigen Zeilen 3 bis 9 der Lösungsmatrix stellen die Bestimmungsgleichungen für die *Vorlastwerte* dar.

S	1	2	3	4	5	6	7	...	13
1	0	0	0	0	0	0	0	...	1
2	- 1/4	1/3	- 1/4	1/3	- 1/4	1/3	- 1/4	...	1
3	4/7	3/14	5/14	0	1/7	- 3/14	- 1/14	...	-1
4	13/28	1/7	9/28	0	5/28	- 1/7	1/28	...	-1
5	5/14	1/14	2/7	0	3/14	- 1/14	1/7	...	-1
6	1/4	0	1/4	0	1/4	0	1/4	...	-1
7	1/7	- 1/14	3/14	0	2/7	1/14	5/14	...	-1
8	1/28	- 1/7	5/28	0	9/28	1/7	13/28	...	-1
9	- 1/14	- 3/14	1/7	0	5/14	3/14	4/7	...	-1

Tab. 5.2-1: Wiedergabe der mit Excel berechneten Lösungsmatrix für $\rho_a = 0$

Die Lösungsmatrix denke man sich nun nach Gleichung 5.1-17 mit dem erweiterten Wägewertvektor multipliziert. Daraus folgt der erweiterte *Massevektor* gemäß 5.1-16. Die Bestimmungsgleichung für die zu kalibrierende Größe, also für die Masse m_P des Prüflings ergibt sich aus der zweiten Zeile der Lösungsmatrix zu

$$m_P = m_N + \frac{1}{3}(Y_2 + Y_4 + Y_6) - \frac{1}{4}(Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7). \quad (5.2-1)$$

Im Falle von $n_w = 5$ erhält man auf entsprechende Weise

$$m_P = m_N + \frac{1}{2}(Y_2 + Y_4) - \frac{1}{3}(Y_1 + Y_3 + Y_5). \quad (5.2-2)$$

Offenbar gilt allgemein für beliebige ungerade Wägewerte n_w und alternierender Belastung die Kalibrierformel

$$m_P = m_N + \frac{2}{n_w - 1} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n_w-1)} Y_{2k} - \frac{2}{n_w + 1} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n_w+1)} Y_{2k-1}. \quad (5.2-3)$$

Es kommt hier also nur auf die Differenz der Wägewertmittel an, die einerseits dem Kalibrierobjekt, andererseits dem Normal zugeordnet sind. Die ist ein unmittelbar einleuchtendes Ergebnis und somit auch eine Bestätigung des Verfahrens.

Ein Vergleich mit dem herkömmlichen Verfahren der Einfachsubstitution ist an dieser Stelle jedoch nicht sinnvoll. Dort setzt man nicht durchgehende, sondern partiell konstante *Drift* voraus. Das bedeutet eine Bindung der Drift nur bei aufeinander folgenden Wechseln von P nach N und von N nach P. Abgesehen davon legt man für die Bindung nicht die Vorlastwerte, sondern die Wägewerte zugrunde. Bei der durchgehenden Driftkonstanz ist jedoch die gesamte Wägereihe durch einen Driftwert festgelegt.

Abweichend von dem bekannten Schema der Einfachsubstitution ist auch eine alternierende Belastung mit einer geraden Anzahl an Wägewerten denkbar. Hierzu werden als Beispiel die Fälle $n_w = 4$ und $n_w = 6$ betrachtet. Sie sind im Anhang unter 9.1.1.3 und 9.1.1.4 niedergelegt. Es ergeben sich die folgenden Kalibrierformeln:

$$m_P = m_N + \frac{1}{4}(Y_4 - Y_1) - \frac{3}{4}(Y_3 - Y_2) \quad \dots n_w = 4 \quad (5.2-4)$$

$$m_P = m_N + \frac{5}{24}(Y_6 - Y_1) + \frac{11}{24}(Y_2 - Y_5) + \frac{1}{3}(Y_4 - Y_3) \quad \dots n_w = 6 \quad (5.2-5)$$

Aus beiden Fällen geht hervor, dass die Kalibrierformel sich aus den Differenzen einander zugeordneter Wägewerte für je ein Normal und je einen Prüfling zusammensetzt. Die Differenzen werden mit bestimmten Faktoren gewichtet. Offenbar ergeben sich die Faktoren aus der Forderung, dass die statistischen Schwankungen der Wägewerte mit gleicher Gewichtung in die Lösung einfließen müssen.

b) Doppelsubstitution

Als weiteres Beispiel für ein lineares Driftmodell mit durchgehender Driftkonstanz wird im Folgenden ein Ausschnitt des Ergebnisses der *Doppelsubstitution* mit $n_w = 12$ Wägungen aufgeführt. Die vollständige Rechnung findet man im Anhang unter 9.1.2.1. Die Komponenten für die Berechnung der Vorlastwerte sind hier nicht mit angegeben.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	23
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1
2	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	...	1

Tab. 5.2-2 Ausschnitt aus der mit Excel berechneten Lösungsmatrix für $\rho_a = 0$

Die Bestimmungsgleichung ist demnach

$$m_P = m_N + \frac{1}{6}(Y_2 + Y_3 + Y_6 + Y_7 + Y_{10} + Y_{11}) - \frac{1}{6}(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_8 + Y_9 + Y_{12}) \quad (5.2-6)$$

Wie man sieht, entspricht dies genau dem Mittelwert der Zyklusdifferenzen der Doppelsubstitution:

$$m_P = m_N + \frac{1}{3}(\Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3) \quad (5.2-7)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Vorlastwerte ist in den Zeilen 3 bis 14 der Lösungsmatrix zu finden. Die Tabelle 5.2-3 zeigt ein Beispiel für die ersten 8 Spalten.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	...
3	59/156	9/52	7/52	41/156	35/156	1/52	- 1/52	17/156	...
4	53/156	81/572	63/572	421/1716	367/1716	9/572	- 9/572	205/1716	...
5	47/156	63/572	49/572	391/1716	349/1716	7/572	- 7/572	223/1716	...
6	41/156	45/572	35/572	361/1716	331/1716	5/572	- 5/572	241/1716	...
7	35/156	27/572	21/572	331/1716	313/1716	3/572	- 3/572	259/1716	...
8	29/156	9/572	7/572	301/1716	295/1716	1/572	- 1/572	277/1716	...
9	23/156	- 9/572	- 7/572	271/1716	277/1716	- 1/572	1/572	295/1716	...
10	17/156	- 27/572	- 21/572	241/1716	259/1716	- 3/572	3/572	313/1716	...
11	11/156	- 45/572	- 35/572	211/1716	241/1716	- 5/572	5/572	331/1716	...
12	5/156	- 63/572	- 49/572	181/1716	223/1716	- 7/572	7/572	349/1716	...
13	- 1/156	- 81/572	- 63/572	151/1716	205/1716	- 9/572	9/572	367/1716	...
14	- 7/156	- 9/52	- 7/52	11/156	17/156	- 1/52	1/52	35/156	...

Tab. 5.2-3 Ausschnitt aus Lösungsmatrix zur Anwendung auf die ersten 8 Wägewerte

5.2.2 Über je drei Messpunkte partiell konstante Drift

a) Zwei verbundene Zyklen

Zunächst wird der einfachste nicht triviale Fall mit $n_w = 5$ Wägewerten gerechnet. Die Einzelheiten zur Rechnung findet man im Anhang unter 9.1.3.1. Im Folgenden wird der wesentliche Ausschnitt der Lösungsmatrix wiedergegeben:

S	1	2	3	4	5	...	8
1	0	0	0	0	0	...	1
2	- 1/4	1/2	- 1/2	1/2	- 1/4	...	1
3	9/10	1/5	0	- 1/5	1/10	...	-1
4	9/20	1/10	1/2	- 1/10	1/20	...	-1
5	0	0	1	0	0	...	-1
6	1/20	- 1/10	1/2	1/10	9/20	...	-1
7	1/10	- 1/5	0	1/5	9/10	...	-1

Tab. 5.2-4: Wiedergabe der mit Excel berechneten Lösungsmatrix für $\rho_a = 0$

Aus der zweiten Zeile der Lösungsmatrix ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die zu kalibrierende Masse zu

$$m_P = m_N + \frac{1}{2}(Y_2 + Y_4) - \frac{1}{4}(Y_1 + 2Y_3 + Y_5) \quad (5.2-8a)$$

$$= m_N + \frac{1}{2}(\Delta Y_1 + \Delta Y_2). \quad (5.2-8b)$$

Wie man sieht, kann die Bestimmungsgleichung so umgeformt werden, dass sich der Masseunterschied als Mittelwert der *Zyklusdifferenzen* der Einfachsubstitution darstellt (siehe Gleichung 4.1-9). Dieses Ergebnis in diesem einfachsten Fall von nur zwei Zyklusdifferenzen stimmt

genau mit der herkömmlich gebräuchlichen Kalibriergleichung der Einfachsubstitution überein (siehe die Gleichungen 4.1-15, 4.1-17).

b) Drei, vier und fünf verbundene Zyklen

Die folgenden Beispiele zeigen die aus der Lösungsmatrix resultierenden Kalibrierformeln im Falle von $n_d = 3, 4$ oder 5 Zyklen aus Einfachsubstitutionen. Entsprechend handelt es sich um $n_w = 7, 9$ oder 11 Wägewerte. Je Zyklus soll die Waagendrift konstant sein. Entscheidend für die Kalibrierformel sind wieder die zweiten Zeilen der Lösungsmatrizen. Sie sind in der Tabelle 5.2-5 zusammengefasst.

n_d	n_w	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	7		-5/28	5/14	-9/28	2/7	-9/28	5/14	-5/28	-	-	-	-
4	9		-3/22	3/11	-1/4	5/22	-5/22	5/22	-1/4	3/11	-3/22	-	-
5	11		-29/262	29/131	-53/262	24/131	-49/262	25/131	-49/262	24/131	-53/262	29/131	-29/262

Tab. 5.2-5: Wiedergabe der zweiten Zeilen der mit Excel berechneten Lösungsmatrizen für $\rho_a = 0$

Im Gegensatz zur Gleichung 5.2-8 ist für mehr als zwei Zyklen eine Darstellung als arithmetisches Mittel der Zyklusdifferenzen nicht möglich. Offenbar kommen hier die Ausführungen in Abschnitt 4.5 zur besten *Gewichtung* zum Tragen, so dass gewichtete Wägewertdifferenzen in Frage kommen. Dieser Fall wird nachstehend weiter untersucht.

5.2.3 Gewichtung von Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution

Nach den Gleichungen 4.2-4 bis 4.2-6 müssen sich auch in diesen Fällen die Lösungen als eine Mittelung der Zyklusdifferenzen ΔY_j der Einfachsubstitution darstellen lassen. Daher stellt sich jetzt die Frage, welche Gewichtungen der Zyklusdifferenzen den Lösungsvektoren in der obigen Tabelle entsprechen. Zur Bearbeitung dieser Fragestellung liegt also die Ausgangsgleichung

$$\sum_{j=1}^{n_w} S_{2j} Y_j = \sum_{k=1}^{n_d} w_{dk} \Delta Y_k \quad (5.2-9)$$

vor. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die mit den gesuchten Gewichtungsfaktoren w_{dk} multiplizierten Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution. Auf der linken Seite steht die allgemeine Lösung mit den Komponenten S_{2j} der zweiten Zeile der Lösungsmatrix. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen 3.2-8 und 4.1-9 lässt sich diese Gleichung in die Vektorform

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{Y} = \frac{1}{2} \mathbf{w}_d^T \mathbf{X}_d \mathbf{Y} \quad (5.2-10)$$

übertragen. Der Vektor \mathbf{S}_2 auf der linken Seite dieser Gleichung stellt also die ersten n_w Elemente der zweiten Zeile der Lösungsmatrix dar. Auf der rechten Seite ist \mathbf{w}_d^T der transponierte *Gewichtungsvektor*, nach dem die Gleichung aufzulösen ist. Die Gleichung 5.2-10 muss für jeden Wägewertvektor \mathbf{Y} erfüllt sein. Die Multiplikatoren von \mathbf{Y} auf beiden Seiten der Gleichung müssen also gleich sein. Da es sich um Vektoren handelt, ergibt sich die Forderung nach der Gleichheit einander entsprechender Komponenten. Es liegt somit ein Gleichungssystem für die Gewichtungskoeffizienten vor. Dieses muss normalisiert werden, indem man beide Seiten von rechts mit der transponierten Driftänderungsmatrix \mathbf{X}_d^T multipliziert. Danach wird von rechts mit der invertierten Normalmatrix $(\mathbf{X}_d \mathbf{X}_d^T)^{-1}$ multipliziert.¹ Die Lösungsgleichung für den Gewichtungsvektor ist dann

$$\mathbf{w}_d^T = 2 \mathbf{S}_2 \mathbf{X}_d^T (\mathbf{X}_d \mathbf{X}_d^T)^{-1} \quad (5.2-11)$$

¹ Da es keine weiteren Bedingungen (Nebenbedingungen) gibt, ist die Normalmatrix auf jeden Fall invertierbar.

Bei der Berechnung der Gewichtungsvektoren werden die Ergebnisse der zweiten Zeilen der Lösungsmatrizen nach den Tabellen 5.2-4 und 5.2-5 verwendet. Einzelheiten der Rechnung findet man im Anhang 9.1.7.

Aus den errechneten Gewichtungen ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für m_P :

$$n_w = 5 \quad m_P = m_N + \frac{1}{2}(\Delta Y_1 + \Delta Y_2) \quad (5.2-12a)$$

$$n_w = 7 \quad m_P = m_N + \frac{1}{14}(5\Delta Y_1 + 4\Delta Y_2 + 5\Delta Y_3) \quad (5.2-12b)$$

$$n_w = 9 \quad m_P = m_N + \frac{1}{22}(6\Delta Y_1 + 5\Delta Y_2 + 5\Delta Y_3 + 6\Delta Y_4) \quad (5.2-12c)$$

$$n_w = 11 \quad m_P = m_N + \frac{1}{131}(29\Delta Y_1 + 24\Delta Y_2 + 25\Delta Y_3 + 24\Delta Y_4 + 29\Delta Y_5) \quad (5.2-12d)$$

Während bei 5 Wägewerten in Übereinstimmung mit der herkömmlichen Kalibrier Gleichung noch das arithmetische Mittel der Zyklusdifferenzen gilt, treten bei Stichprobenumfängen größer als 5 gewichtete Mittel mit „ungleichmäßigen“ Gewichtungen auf.¹

Es bestätigen sich die Erkenntnisse von Abschnitt 4.5.1.1, in dem die beste Gewichtung von Zyklusdifferenzen untersucht worden ist (Tab 4.5-1). Die Bestimmungsgleichungen 5.2-12 stellen die Richtigkeit der bisher üblichen Auswertung von Wägungen nach dem Prinzip der Einfachsubstitution in Frage: Die genaue Auswertung der Wägegleichungen und der linearen Driftbeziehungen unter Anwendung des Prinzips der geringsten Wägewertabweichungen hat gezeigt, dass das eher anschaulich begründete herkömmliche Auswerteverfahren mathematisch nicht korrekt ist. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.2 zur Gewichtung von Wägewertdifferenzen wurden die Wägegleichungen bei der herkömmlichen Auswertung der Einfachsubstitution falsch gewichtet. Es wurde in der bisherigen Praxis gegen den Grundsatz statistisch gleichwertiger Wägungen verstoßen.

5.2.4 Gewichtung von Wägungen bei der Einfachsubstitution

Im vorherigen Abschnitt wurden für die Einfachsubstitution Gewichtungsfaktoren w_{dk} der Zyklusdifferenzen ermittelt, die der Anwender zukünftig bei der Berechnung der mittleren Wägewertdifferenz verwenden sollte, damit jede einzelne Wägung als statistisch gleichwertig angesehen werden kann. Jeder Zyklusdifferenz der Reihen $1 \leq k \leq n_d$ wurde ein bestimmter Gewichtungsfaktor zugeordnet. Dabei hatte sich herausgestellt, dass die Gewichtungsfaktoren nicht alle gleich sind und sowohl von der Positionsnummer k als auch der Gesamtzahl n_d der Zyklusdifferenzen abhängen. Die Gewichtungsfaktoren lassen sich zwar mit Hilfe der Lösungsgleichung nach 4.5-15 oder 5.2-11 berechnen, jedoch sollten sie in der Praxis den Anwendern auch in einer Tabelle zur Verfügung gestellt werden.

Anstelle Gewichtungsfaktoren von Zyklusdifferenzen zu errechnen, sollte es als Umkehrung auch möglich sein, bei vorgegebenen Gewichtungen der Zyklusdifferenzen die zugehörigen Gewichtungen der Wägungen zu bestimmen. In diesem Fall würde man für die Wägungen der Reihen $1 \leq i \leq n_w$ ungleiche Gewichtungsfaktoren w_i vorsehen, um auf diese Weise statistisch ungleichwertige Wägungen zu erlauben.

Aus den Erkenntnissen des vorherigen Abschnitts stellt sich zum Beispiel die Frage, wie die Gewichtung der Wägegleichungen im Falle der Einfachsubstitution sein muss, damit zur Berechnung der mittleren Zyklusdifferenzen das herkömmlich benutzte arithmetische Mittel gilt. In diesem Falle wären also alle w_{dk} gleich groß, während zu erwarten ist, dass die zugehörigen Gewichtungsfaktoren w_i voneinander verschieden sind. An diese Fragestellung ist die Gleichung 5.2-10 anzupassen, indem

¹ Aus Symmetriegründen muss im Falle von 5 Wägewerten das gewichtete Mittel gleich dem arithmetischen Mittel sein, denn eine andere Möglichkeit gibt es bei zwei Wägewertdifferenzen nicht.

man auf der rechten Gleichungsseite den bisherigen Gewichtungsvektor \mathbf{w}_d durch einen Vektor $\mathbf{d}(n_d)$, bei dem alle Komponenten gleich 1 sind, ersetzt. Zwecks Normierung muss noch durch die Dimensionszahl n_d dividiert werden. Auf der linken Seite würde diese Änderung anderen Koeffizienten vor den Wägewerten entsprechen. Dies erreicht man durch Einfügen geeigneter Wägewert – Multiplikatoren. Sie seien durch die Diagonalmatrix \mathbf{W}_s gegeben. Somit gilt jetzt

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{W}_s \mathbf{y} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}^T(n_d)}{n_d} \mathbf{X}_d \mathbf{y} \quad (5.2-13)$$

Die Diagonalelemente von \mathbf{W}_s sind so festzulegen, dass die obige Gleichung für jeden Wägewertvektor erfüllt ist. Mit dieser Festlegung ist dann die Lösung für die Masse des Prüflings durch

$$m_p = m_N + \mathbf{S}_2 \mathbf{W}_s \mathbf{y} \quad (5.2-14)$$

gegeben. Anstatt der Wägewerte \mathbf{Y} werden hier deren Erwartungswerte \mathbf{y} verwendet, weil Veränderungen bei den Gewichtungen nur dann keine Rolle spielen, wenn es keine Wägewertabweichungen gibt. Wenn man sich auf den Idealfall von Erwartungswerten beschränkt, gilt aber auch

$$m_p = m_N + \mathbf{S}_2 \mathbf{y} \quad (5.2-15)$$

Da die Gleichung 5.2-13 für jeden Vektor \mathbf{y} erfüllt sein soll, erhält man mit

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{W}_s = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}^T(n_d)}{n_d} \mathbf{X}_d \quad (5.2-16)$$

eine Bestimmungsgleichung für die Elemente des Wägewert - Multiplikators \mathbf{W}_s . Über die Dimension n_d wird hier keine Festlegung getroffen. Jedoch der Vektor $\mathbf{d}(n_d)$ und die Driftänderungsmatrix \mathbf{X}_d auf der rechten Seite der Gleichung sind hinsichtlich ihrer Struktur bekannt. Deshalb kann die Multiplikation auf der rechten Seite der obigen Gleichung ausgeführt werden. Ein Vergleich der sich ergebenden Vektorkomponenten mit der linken Gleichungsseite liefert für die Diagonalelemente des Wägewert - Multiplikators¹

$$w_{si} = \frac{(-1)^i \cdot 2 + (\delta_i^1 + \delta_i^{n_w})}{2n_d S_{2i}} \quad (5.2-17)$$

Die vorliegenden Beziehungen beruhen auf der allgemeinen Wägeggleichung $\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{y}$. Die Multiplikation der Wägeggleichung mit dem Wägewert - Multiplikator \mathbf{W}_s und dem transponierten Wägeschema \mathbf{X}^T ergibt

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W}_s \mathbf{X} \mathbf{M} = \mathbf{X}^T \mathbf{W}_s \mathbf{y} \quad (5.2-18)$$

Entsprechend der Herleitung dieser Gleichung gibt es eine Lösung für \mathbf{M} , denn der Wägewert - Multiplikator \mathbf{W}_s wurde so gewählt, dass die Lösung das ungewichtete arithmetische Mittel der Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution ist (siehe die Gleichungen 5.2-13 und 5.2-14). Anhand der Gleichungen 5.2-17 und 5.2-18 kann nun die Frage nach der zugehörigen Gewichtung der einzelnen Wägungen weiter behandelt werden.

¹ Zur Definition des Kronecker-Symbols siehe Gleichung 2.2-2

Dazu wird die Gewichtungsmatrix \mathbf{W} eingeführt.¹ Es handelt sich um eine Diagonalmatrix, mit der die Wägeggleichungen 2.2-9 zu multiplizieren sind (vergleiche auch Abschnitt 4.2)². Mit der Definition der gewichteten Größen

$$\mathbf{X}' = \mathbf{W}\mathbf{X} \quad \dots \quad \text{Gewichtete erweiterte Wägematrix} \quad (5.2-19)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{W}\mathbf{y} \quad \dots \quad \text{Gewichteter Wägewertvektor} \quad (5.2-20)$$

ergeben sich die gewichteten Wägeggleichungen zu

$$\mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{y}' \quad (5.2-21)$$

Auch bei diesen Gleichungen geht man von den Erwartungswerten der Wägewerte aus, um die Problematik der Gewichtung der Wägewertabweichungen zu umgehen.³ Zusammen mit den Nebenbedingungen in den Gleichungen 2.2-10 und 3.2-10 für $\mathbf{E} = 0$ ergibt sich ein Gleichungssystem in der gleichen Form wie im Falle ohne Gewichtung. Aus diesem Grunde entspricht die Lösung der Gleichungen dem Abschnitt 5.1. Nach Gleichung 5.1-5 für verschwindende Wägewertabweichungen ist die Normalengleichung

$$\mathbf{X}'^T \mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{X}'^T \mathbf{y}' \quad (5.2-22)$$

Wenn man diese Gleichung auf die ungewichteten Größen zurückführt, ergibt sich

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{X} \mathbf{M} = \mathbf{X}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{y} \quad (5.2-23)$$

Im speziellen Fall der Einfachsubstitution wird eine bestimmte Gewichtung gesucht, die der Gleichung 5.2-18 entspricht. Der Vergleich mit 5.2-23 liefert die gesuchte Aussage:

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}_s \quad (5.2-24)$$

Damit ist grundsätzlich die Frage nach der Gewichtung beantwortet, die mit der Verwendung des arithmetischen Mittels der Zyklusdifferenzen äquivalent ist. Die einzelnen Elemente der diagonalen Gewichtungsmatrix errechnen sich auf der Basis von Gleichung 5.2-17.⁴

Die Gewichtungen sollen noch normiert werden. Es soll also

$$w_{ni} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n_w} w_i} \quad (5.2-25)$$

gelten. Dann kürzt sich die Dimensionszahl n_d heraus. Die normierten Elemente der Gewichtung ergeben sich zu

¹ Die Gewichtungsmatrix der Wägungen darf nicht zu verwechselt werden mit der Gewichtungsmatrix der Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution.

² Wenn die Gewichtungsmatrix nicht diagonal ist, würde man zulassen, dass die einzelnen Wägewertabweichungen korreliert sind. Dies entspricht nicht den Voraussetzungen, da das Ergebnis einer Wägung nach Abzug aller systematischen Einflüsse nicht von dem Ergebnis anderer Wägungen beeinflusst ist.

³ Genau diese Problematik wurde bisher von Anwendern der Einfachsubstitution nicht beachtet. Die Residuen, die sich aus den gewichteten Wägewertabweichungen $\mathbf{e}' = \mathbf{W}\mathbf{e}$ ergeben, sind nicht mit den Residuen gleichzusetzen, die man bei gleicher Gewichtung erhält.

⁴ Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass stets konstante Auftriebskräfte während des Beobachtungszeitraumes vorausgesetzt wurden.

$$w_{ni} = \frac{\sqrt{((-1)^i \cdot 2 + (\delta_i^1 + \delta_i^{n_w})) S_{2i}^{-1}}}{\sum_{i=1}^{n_w} \sqrt{((-1)^i \cdot 2 + (\delta_i^1 + \delta_i^{n_w})) S_{2i}^{-1}}} \quad (5.2-26)$$

In Anhang 9.1.7 sind die normierten Gewichtungen für die ersten 5 Zyklen zusammenhängender Einfachsubstitutionen errechnet. Es ergeben sich die in der Tabelle 5.2-6 gelisteten Werte.

n_d	n_w	i 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	0,2	0,2	0,2	0,2	-	-	-	-	-	-	-
3	7	0,13839	0,13839	0,14587	0,15472	0,14587	0,13839	0,13839	-	-	-	-
4	9	0,10666	0,10666	0,11141	0,11684	0,11684	0,11684	0,11141	0,10666	0,10666	-	-
5	11	0,08663	0,08663	0,09062	0,09523	0,09425	0,09330	0,09425	0,09523	0,09062	0,08663	0,08663

Tab. 5.2-6: Gewichtungen als Beispiel in Verbindung mit dem herkömmlichen Substitutionsverfahren

Damit sind die herkömmlichen Kalibrierformeln bei der Auswertung von Einfachsubstitutionen auf gewichtete Wägegleichungen zurückgeführt. Nur bei 5 Wägungen sind die Gewichtungen der Wägegleichungen noch gleich. Für mehr als 5 Wägungen ergeben sich hingegen unterschiedliche Gewichtungsfaktoren. Diese stellen hier sicher, dass die mittlere Wägewertdifferenz aus gleichwertigen Zyklusdifferenzen der Einfachsubstitution gebildet wird. Da jedoch die einzelnen Wägungen und nicht die Zyklusdifferenzen statistisch gleichwertig sein müssen, sind bei größeren Stichprobenumfängen ab $n_w = 7$ die Gleichungen 5.2-12 zu verwenden. In diesem Sinne mögen die Werte in der Tabelle 5.2-6 nur eine informative Bedeutung haben, in der Praxis aber keine Verwertung finden.

5.2.5 Über je vier Messpunkte partiell lineare Drift

Der Vollständigkeit halber sei noch ein Beispiel zur Doppelsubstitution behandelt. Im Gegensatz zu den oben ausgeführten Beispielen werden jetzt Folgen unabhängiger Substitutionszyklen zugrunde gelegt. Es handelt sich also um unterschiedliche Beobachtungszeiträume. Die genaue Rechnung ist im Anhang unter 9.1.4.1 zu finden. Die Tabelle 5.2-8 zeigt die ersten 8 Spalten der im Anhang errechneten Lösungsmatrix.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	...
3	47/60	19/60	1/60	- 7/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
4	29/60	13/60	7/60	11/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
5	11/60	7/60	13/60	29/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
6	- 7/60	1/60	19/60	47/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
7	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	47/60	19/60	1/60	- 7/60	...
8	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	29/60	13/60	7/60	11/60	...
9	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	11/60	7/60	13/60	29/60	...
10	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 7/60	1/60	19/60	47/60	...
11	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
13	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...
14	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	...

Tab. 5.2-7 Ausschnitt aus Lösungsmatrix zur Anwendung auf die ersten 8 Wägewerte

Das vorliegende Beispiel sei vor allem mit dem Fall der durchgehenden Driftkonstanz verglichen (siehe Abschnitt 5.2.1 unter Punkt b). Für die Masse ergibt sich erwartungsgemäß wieder die Kalibriergleichung 5.2.6. Jedoch sind die Bestimmungsgleichungen für die Vorlastwerte anders. Dies hängt damit zusammen, dass die Wägewerte durch die separaten Zyklen anders gebunden sind als bei Zyklen, die durch Driftbeziehungen miteinander gekoppelt sind.

5.2.6 Driftmodelle

Wenn man den idealen, in der Praxis jedoch unrealistischen Fall annimmt, dass die vom Normal und vom Kalibrierobjekt dargestellten Lasten stets genau gleich und konstant sind, dürften die Wägewerte beim Lastwechsel keine „Sprünge“ machen. Dieser Fall wäre gegeben, wenn alle Einflussparameter auf die Objekte konstant wären und die Massen sich nicht voneinander unterscheiden. Unter dieser Voraussetzung entsprächen die Wägewerte in ihrem Verlauf genau den Vorlastwerten. Nur in einem solchen Falle kann man daher die Vorlastwerte unmittelbar an den Wägewerten erkennen und somit graphisch darstellen. Auf dieser Grundlage soll jetzt an einigen Beispielen gezeigt werden, wie gut ein Driftmodell das tatsächliche Driftverhalten wiedergibt.

Beispiele für die Entwicklung der Vorlastwerte sind in Abbildung 5.2-9 dargestellt. Dabei sind drei verschiedene Driftmodelle angenommen. Die Beispiele können mit Hilfe von Excel nachvollzogen werden. Dazu werden (von links nach rechts) die Lösungsmatrizen verwendet, die im Anhang unter 9.1.2.1, 9.1.4.1 und 9.1.3.4 berechnet sind. Die verwendeten Wägewerte stehen in der Tabelle 5.2-8.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	6	7,5	6	2,5	1	0,5	6	12,5	14	14,5	13	10,5

Tab. 5.2-8 Wägewerte zur Darstellung der Anpassungsfähigkeit verschiedener Driftmodelle

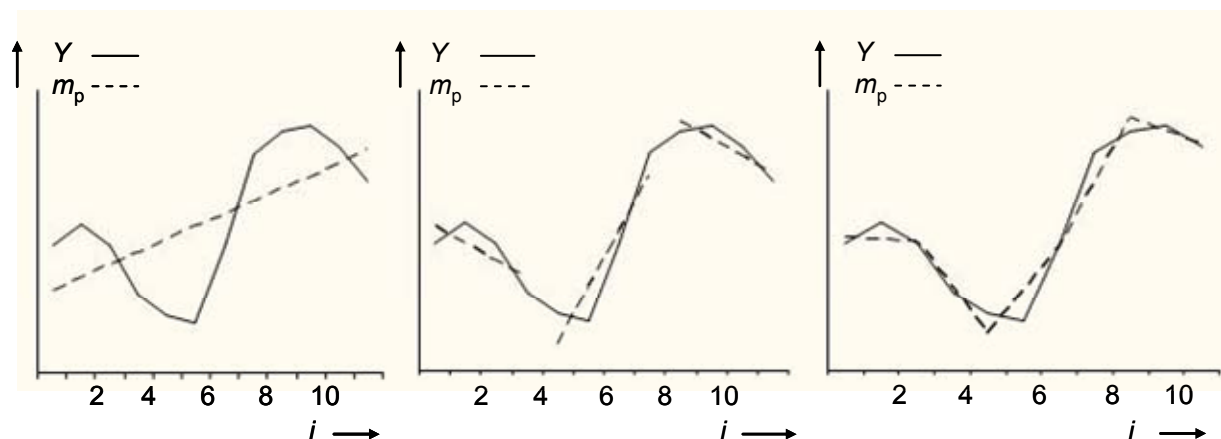


Abb. 5.2-9 Anpassungsfähigkeit verschiedener Driftmodelle

Das erste Diagramm stellt den Fall einer durchgehend konstanten Drift dar (siehe Abschnitt 5.2.1 b). Im zweiten Diagramm handelt es sich um partiell konstante Driftverläufe mit voneinander unabhängigen Zyklen entsprechend der Doppelsubstitution (siehe Abschnitt 5.2.4). Im letzten Diagramm liegt zwar ebenfalls partiell konstante Drift vor, jedoch entstammen die Zyklen einem Beobachtungszeitraum entsprechend dem herkömmlichen Verfahren zur Auswertung von Einfachsubstitutionswägungen (siehe Abschnitt 5.2.2 b).

5.3 Freie Driftänderungen (LDA-Modell)¹

Es wird nun eine weiterführende Methode eingeführt, mit deren Hilfe sich im Zuge einer *Wägereihe* nicht nur die Massen der zu kalibrierenden Objekte, sondern auch die *Vorlastwerte* der Komparatorwaage bestimmen lassen. In Abschnitt 5.1 waren die Vorlastwerte durch feste Beziehungen voneinander abhängig. Diese Beziehungen wurden durch verschiedene Arten linearer Driftmodelle festgelegt (siehe Abschnitt 3.3). Abweichungen von den Vorlastwertbeziehungen waren nicht zugelassen. In diesem Sinne handelte es sich um *unfreie Driftänderungen*. Diese konnten auch 0 sein, in diesem Falle wurden Driftänderungen ganz ausgeschlossen (siehe zum Beispiel Abschnitt 5.2). Jetzt sollen Abweichungen von vorgegebenen Vorlastwertbeziehungen möglich sein. Das bedeutet, dass in diesem Abschnitt die Driftänderungen in einem gewissen Rahmen frei sind. Es können zwar nach wie vor die bereits behandelten linearen Driftmodelle verwendet werden, jedoch sind jetzt Abweichungen von den Vorgaben des Modells erlaubt.

Damit gelten jetzt die folgenden Voraussetzungen:

- Die *Driftbeziehungen* seien in Form linearer Gleichungen vorgegeben.
- Die Driftänderungen seien jedoch frei.
- Die Folge der Objekte und damit das Wägeschema seien beliebig.²
- Die Zyklen und Beobachtungszeiträume seien ebenfalls beliebig.³
- Eine beste Schätzung der zu bestimmenden Massen liegt dann vor, wenn die zufälligen Wägewertabweichungen ausgeglichen sind.
- Die *Wägewerte* sind dann ausgeglichen, wenn die Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen ein Minimum ist.

Die in Abschnitt 5.1 entwickelte Methode der geringsten Wägewertabweichungen kann also auch hier zum Einsatz kommen. Es gelten somit die Gleichungen 5.1-4.

Eine besondere Rolle spielt nun die *Driftgleichung*, also die Darstellung der Driftänderungen durch das lineare Gleichungssystem

$$DM = E, \quad (5.3-1)$$

das in Abschnitt 3.2 eingeführt wurde (siehe Gleichung 3.2.10). Danach charakterisiert die *Driftmatrix* **D** das jeweils zugrunde gelegte lineare Driftmodell. Durch die Driftmatrix werden lineare Beziehungen zwischen den Vorlastwerten festgelegt. Wenn sich die Vorlastwerte in gleichem Maße ändern, also bei konstanter *Drift*, ist das Gleichungssystem homogen. In diesem Falle ist die rechte Seite der Gleichung gleich 0. Abweichungen von einer konstanten Drift werden durch die Inhomogenität **E** dargestellt. Dies ist die Bedeutung des *Driftänderungsvektors* **E**.⁴ Nun kann **E** eine feste Größe sein, die als Parameter (von außen) vorgegeben ist, oder aber eine Variable, die nach einer bestimmten Methode „einzustellen“ ist. Wenn **E** eine Variable ist, sind Abweichungen von einer festen Driftbeziehung zugelassen. Dies ist die Basis der nachfolgend realisierten Methode: Der Driftänderungsvektor wird als Variable (freie Größe) aufgefasst, die so zu wählen ist, dass der Verlauf der Vorlastwerte optimal an den tatsächlichen (unbekannten) Verlauf angepasst ist.

Die Herleitung des Prinzips freier Driftänderungen basiert auf zwei „Denkansätzen“, die am Ende zusammenzuführen sind:

Ansatz 1

Das System der *Wägeggleichungen* soll gelöst werden. Dabei müssen die Driftgleichungen als Nebenbedingung erfüllt sein. Es gelten also die Wägeggleichungen 2.2-9 zusammen mit den Driftgleichungen 5.3-1. In diesem Ansatz würden die Wägeggleichungen das Hauptgleichungssystem darstellen.

¹ Least drift alteration (LDA)

² Selbstverständlich muss das Wägeschema mathematisch sinnvoll gewählt werden, so dass eine Lösung der Gleichungssysteme überhaupt möglich ist.

³ Auch die Festlegung der Beobachtungszeiträume muss mathematisch sinnvoll sein. Unstimmigkeiten dürften in der Praxis nur dann auftreten, wenn man die Abläufe der Wägungen falsch in ein Driftmodell überträgt.

⁴ Der Driftänderungsvektor wird in diesem Zusammenhang auch als Driftabweichungsvektor bezeichnet.

Ansatz 2

Das System der Driftgleichungen soll gelöst werden. Dabei müssen die Wägeggleichungen erfüllt sein. Es gelten wieder die Gleichungen 2.2-9 und 5.3-1. Nur sind jetzt die Rollen getauscht. Nun sind die Driftgleichungen das Hauptgleichungssystem und die Wägeggleichungen stellen die Nebenbedingung dar.¹

Diese beiden Ansätze sollen „gleichberechtigt“ einer Lösung zugeführt werden. Das lässt sich folgendermaßen erreichen:

- Im ersten Ansatz denkt man sich den Driftänderungsvektor \mathbf{E} als festen Vektorparameter. Bei jedem Parameterwert sollen die Wägewertschwankungen ausgeglichen sein. Es gilt also das bekannte Prinzip der geringsten Wägewertabweichungen (siehe Abschnitt 5.1). Die Residuen $\langle \mathbf{e} \rangle$ würden vom jeweils vorliegenden Vektorparameter \mathbf{E} abhängen. Den sich ergebenden *erweiterten Massevektor* $\mathbf{M}(\mathbf{E})$ stelle man sich als Funktion des Driftänderungsvektors \mathbf{E} vor.
- Im zweiten Ansatz denkt man sich umgekehrt den Vektor \mathbf{e} der Wägewertabweichungen als festen Vektorparameter, bei dem der Driftverlauf stets derart festgelegt ist, dass die Summe der Quadrate der *Driftabweichungen* \mathbf{E} minimal ist.² Die sich ergebenden Residuen $\langle \mathbf{E} \rangle$ der Driftabweichungen würden dann vom jeweils vorliegenden Vektorparameter \mathbf{e} abhängen. Den resultierenden erweiterten Massevektor $\mathbf{M}(\mathbf{e})$ stelle man sich hier als Funktion des Vektors der Wägewertabweichungen \mathbf{e} vor.
- Beide Fälle sollen die gleiche Lösung liefern. Dies ist in eine Gleichung zu fassen. Es gibt also eine gemeinsame Nebenbedingung, das ist die Identität der erweiterten Massevektoren nach den Ansätzen 1 und 2.

Die Abbildung 5.3-1 stellt die oben beschriebene Vorgehensweise graphisch dar.

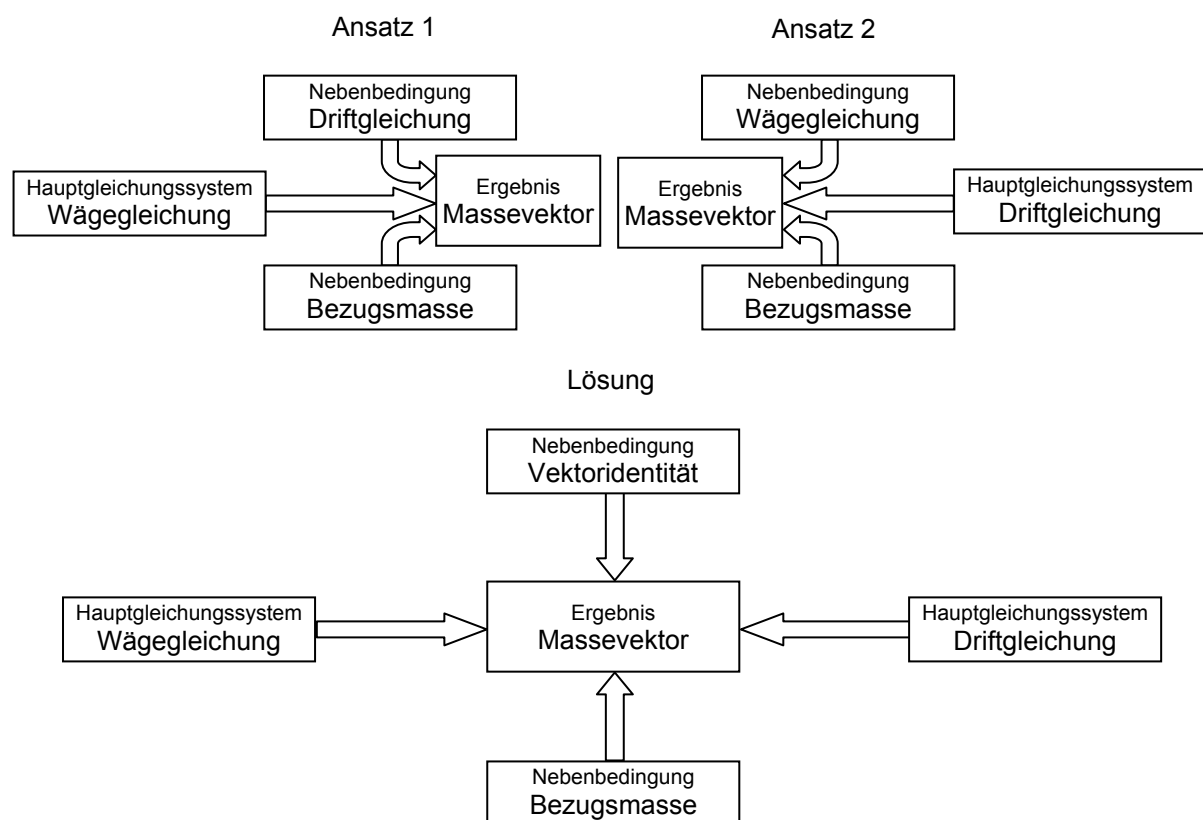


Abb. 5.3-1: Prinzip der geringsten Wägewert- und Driftabweichungen

¹ Es sollte nicht stören, dass es sich eigentlich um ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Vorlastwerte handelt, da die ersten n_0 Spalten der Driftmatrix nur aus Elementen Null bestehen. Dies ist jedoch ein mathematischer Spezialfall, bei dem davon ausgegangen wurde, dass zwischen den Objektmassen und den Vorlastwerten kein Zusammenhang besteht.

² Die Begriffe „Driftänderungen“ und „Driftabweichungen“ werden synonym verwandt. Um zu verdeutlichen, dass Abweichungen von einer konstanten Drift vorliegen, wird meist von Driftabweichungen gesprochen.

Die Abbildung zeigt, dass nicht nur die *Wägeggleichungen* auf der linken Seite, sondern auch die Driftgleichungen auf der rechten Seite auf entsprechende Art und Weise als Hauptgleichungssystem für den erweiterten Massevektor verwendet werden könnten. Die Gleichungen für die linke Seite wurden bereits in Abschnitt 5.1 formuliert. Sie sind jetzt zu ergänzen durch diejenigen Gleichungen, die dem Ansatz 2 entsprechen. Am Ende muss die gemeinsame Nebenbedingung aufgestellt werden, die sicherstellt, dass beide Ansätze zu dem gleichen Massevektor führen.

Es gilt jetzt, den Ansatz 2 umzusetzen. Dazu wird ein neues Driftmodell definiert. Es soll so gestaltet sein, dass sich der Verlauf der *Vorlastwerte* einerseits an die Änderungen der *Drift* anpasst, dass aber andererseits auf zufällige (plötzliche) Änderungen keine Reaktion erfolgt. Dadurch soll erreicht werden, dass eine statistische Streuung der Vorlastwerte, die sich in Folge von zufälligen Störungen einer sich allmählich ändernden *Waagendrift* überlagert, von der Drift separiert wird. Bekannter Maßen ist Mittelung gleichbedeutend mit dem Auffinden von Werten, bei denen die Summe der Quadrate von Abweichungen am geringsten ist (Ausgleichsverfahren [9], [11], [13]). Ein solches Verfahren wurde zum Beispiel in Abschnitt 5.1 durchgeführt. Auch hinsichtlich der Drift geht es darum, einen vermittelnden Verlauf der Vorlastwerte gegenüber zufällig streuenden einzelnen Werten aufzufinden. Aus diesem Grunde ist für das neue Driftmodell die Forderung nach einem Minimum für die Summe der Quadrate der Driftabweichungen entscheidend.

Zur mathematischen Realisierung dieser Forderung ist ein Basismodell in Form einer *Driftmatrix* \mathbf{D} zu konkretisieren, welches die Vorlastwertbeziehungen definiert, denen gegenüber Abweichungen \mathbf{E} auftreten sollen. Das Basismodell sei durch Festlegung der Wägezyklen passend gewählt. In der Abbildung 5.3-2 ist die Bedeutung von Driftabweichungen oder auch Driftänderungen veranschaulicht. Im Falle von $\mathbf{E} = 0$ wäre die Drift konstant. Abweichungen von diesem Fall seien aber zugelassen. Die Driftänderungen \mathbf{E} im Zuge der gesamten Messreihe sind so zu bestimmen, dass Summe der Quadrate ein Minimum ist.

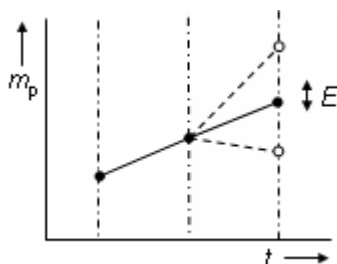


Abb. 5.3-2: Driftabweichungen \mathbf{E}

Zum Ausgleichsverfahren hinsichtlich der Driftabweichungen wird an Stelle des erweiterten *Massevektors* der variable Massevektor γ eingeführt. Der zugehörige Vektor der Driftabweichungen sei $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \varepsilon$. Aus Gründen der Allgemeinheit wird noch ein unfreier Anteil der Driftänderungen mitgeführt, der durch den Vektorparameter \mathbf{E}_0 gekennzeichnet ist. In der Regel wird jedoch in der sich ergebenden Kalibrierformel $\mathbf{E}_0 = 0$ gesetzt. Die freien Driftabweichungen ε hängen von der Wahl des erweiterten Massevektors ab. Dies ergibt sich aus der *Driftbeziehung* entsprechend Gleichung 5.3-1:

$$\mathbf{D}\gamma = \mathbf{E}_0 + \varepsilon(\gamma) \quad (5.3-2)$$

Durch Multiplikation mit der transponierten Driftmatrix erfolgt die Gauß-Transformation der Driftgleichung in die Normalform [9], [11], [15]:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D}\gamma = \mathbf{D}^T \mathbf{E}_0 + \mathbf{D}^T \varepsilon(\gamma) \quad (5.3-3)$$

Wenn man sich diese Gleichung nach γ aufgelöst vorstellt, muss die Wägeggleichung als Nebenbedingung erfüllt sein. Dabei ist der Vektor \mathbf{e} der Wägewertabweichungen jeweils als fester Parameter zu verstehen. Die Gleichung 2.2-9 nimmt dann die Form

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Y} - \mathbf{e} \quad (5.3-4)$$

an. Der Massevektor $\boldsymbol{\gamma}$ ist so zu wählen, dass

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \min \quad (5.3-5)$$

gilt. Wenn das gesuchte Minimum gefunden ist, ist der Massevektor festgelegt. Dann ist also

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (5.3-6a)$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle^T \langle \mathbf{E} \rangle = (\mathbf{E}_0^T + \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T) (\mathbf{E}_0 + \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) \quad \text{für } \boldsymbol{\gamma} \rightarrow \mathbf{M} \quad (5.3-6b)$$

Zur Forderung nach den geringsten Quadraten der Driftabweichungen muss der Gradient des Betragsquadrats des Vektors der Driftabweichungen gebildet werden (siehe Gleichung 5.3-12).

Die Ansätze müssen jetzt zu einem gemeinsamen Gleichungssystem zusammengeführt werden. Die verschiedenen Inhalte sind in der unteren Hälfte der Abbildung 5.3-1 dargestellt. Auf der linken Seite findet man den Inhalt „Wägewertabweichungen“. Auf der rechten Seite steht der Inhalt „Driftabweichungen“. Der mittlere Teil „koppelt“ die beiden Inhalte zusammen, indem eine „Vektoridentität“ der erweiterten Massevektoren hergestellt wird. Dabei gilt auch die gemeinsame Nebenbedingung „Bezugsmasse“.

Alle Gleichungen werden noch einmal zusammengestellt:

1. Inhalt Wägewertabweichungen

Es handelt sich um die bereits in Abschnitt 5.1 aufgestellten Gleichungen:

$$\text{Wägleichung:} \quad \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Y} - \mathbf{e}(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.3-7a)$$

$$\text{Transponierte Wägleichung:} \quad \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T = \mathbf{Y}^T - \mathbf{e}^T(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.3-7b)$$

$$\text{Differenzielle Form:} \quad (d\boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{X}^T = -d\mathbf{e}^T(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.3-7c)$$

$$\text{Normalisierte Wägleichung:} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{e}(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.3-8)$$

$$\text{Bedingung für Minimum:} \quad \frac{\partial(\mathbf{e}^T \mathbf{e})}{\partial \boldsymbol{\beta}} d\boldsymbol{\beta} = 0 \quad (5.3-9)$$

2. Inhalt Driftabweichungen

Zur Forderung nach den geringsten Quadraten der Driftabweichungen wird der Gradient des Betragsquadrats des Vektors der Driftabweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ gebildet. Insgesamt liegen die folgenden Gleichungen vor:

$$\text{Driftgleichung (siehe 5.3-2):} \quad \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (5.3-10a)$$

$$\text{Transponierte Driftgleichung:} \quad \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^T = \mathbf{E}_0^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\gamma}) \quad (5.3-10b)$$

$$\text{Differenzielle Form:} \quad (d\boldsymbol{\gamma}^T) \mathbf{D}^T = d\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\gamma}) \quad (5.3-10c)$$

$$\text{Normalisierte Driftgleichung (siehe 5.3-3):} \quad \mathbf{D}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}^T \mathbf{E}_0 + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (5.3-11)$$

$$\text{Bedingung für Minimum:} \quad \frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} d\boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (5.3-12)$$

3. Vektoridentität

Die gemeinsame Nebenbedingung muss gewährleisten, dass die Massevektoren in den beiden Fällen identisch sind. Diese Identität besagt, dass der erweiterte Massevektor, bei dem die Driftabweichungen am geringsten sind, gleich dem erweiterten Massevektor ist, bei dem die Wägewertabweichungen minimal sind. Somit gilt die Nebenbedingung $\beta = \gamma$ beziehungsweise $\beta - \gamma = 0$. Diese lineare Nebenbedingung für die Massevektoren β und γ ist homogen. Eine Inhomogenität hätte keine Bedeutung hinsichtlich der vorliegenden Problemstellung. Jedoch aus Gründen der mathematischen Allgemeinheit soll dennoch eine Inhomogenität in Form eines Parametervektors \mathbf{a} der Dimension n_w hinzugefügt werden. Dieser Parametervektor kann zu jeder Zeit 0 gesetzt werden. Nach diesen Bemerkungen lautet die Nebenbedingung „Vektoridentität“:

$$\beta - \gamma = \mathbf{a} \quad \text{für} \quad \mathbf{a} = 0 \quad (5.3-13)$$

4. Bezugsmasse

Diese Nebenbedingung wird von Gleichung 2.2-10 übertragen:

$$\text{Bezugsmasse:} \quad \mathbf{x}_1 \beta = m_R \quad (5.3-14)$$

In Abschnitt 5.1.1 wurde durch Gleichung 5.1-6 eine geeignete Lagrange-Funktion definiert, mit deren Hilfe ein lineares Gleichungssystem mit Nebenbedingungen gelöst werden konnte. Auf entsprechende Weise wird auch hier eine Lagrange-Funktion aufgestellt, die zu einer Lösung der oben dargelegten Gleichungen 5.3-7 bis 5.3-14 führen soll [9], [13]. Diese Funktion wird aus den oben beschriebenen Inhalten gebildet. Sie enthält die Summe der Quadrate der Wägewert- und Driftabweichungen, sowie die Terme der Nebenbedingungen, verbunden mit den Lagrange-Multiplikatoren λ und λ :

$$L = \mathbf{e}(\beta)^T \mathbf{e}(\beta) + \boldsymbol{\varepsilon}(\gamma)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\gamma) + \lambda(\mathbf{x}_1 \beta - m_R) + (\beta^T \mathbf{x}_1^T - m_R) \lambda + \lambda^T (\beta - \gamma) + (\beta^T - \gamma^T) \lambda \quad (5.3-15)$$

Zur Erfüllung der Bedingungen 5.3-9 und 5.3-12 für die Summe der Quadrate geht man von dem totalen Differential dL aus. Dazu werden jetzt einige Zwischenrechnungen durchgeführt.

Das Differential der Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen ist $d(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = (d\mathbf{e}^T) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T d\mathbf{e}$. Da die Summanden Skalare sind, gilt $\mathbf{e}^T d\mathbf{e} = (d\mathbf{e}^T)^T = (d\mathbf{e}^T) \mathbf{e}$. Unter Anwendung der differenziellen Wägleichung 5.3-7 erhält man daher für das Differential der Wägewertabweichungen

$$d(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = 2(d\mathbf{e}^T) \mathbf{e} \quad (5.3-16a)$$

$$= -2(d\beta^T) \mathbf{X}^T \mathbf{e} \quad (5.3-16b)$$

Die Eliminierung von \mathbf{e} erfolgt nun mit Hilfe der normalisierten Wägleichungen 5.3-8:

$$d(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = 2(d\beta^T) (\mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta - \mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \quad (5.3-17)$$

Entsprechend verfährt man mit den Driftabweichungen: Das Differential der Summe der Quadrate der Driftabweichungen ist $d(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = (d\boldsymbol{\varepsilon}^T) \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\varepsilon}$. Da die Summanden wieder Skalare sind, gilt $\boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\boldsymbol{\varepsilon}^T)^T = (d\boldsymbol{\varepsilon}^T) \boldsymbol{\varepsilon}$. Unter Anwendung der differenziellen Driftgleichung 5.3-10 erhält man daher für das Differential der Driftabweichungen

$$d(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = 2(d\gamma^T) \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.3-18)$$

Die Eliminierung von $\boldsymbol{\varepsilon}$ erfolgt nun mit Hilfe der normalisierten Driftgleichung 5.3-11:

$$d(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = 2(d\gamma^T) (\mathbf{D}^T \mathbf{D} \gamma - \mathbf{D}^T \mathbf{E}_0) \quad (5.3-19)$$

Nach diesen Zwischenrechnungen kann das Differential der Lagrange-Funktion berechnet werden. Unter Verwendung der Gleichungen 5.3-17 und 5.3-19 ergibt sich durch Differenzieren von Gleichung 5.3-15

$$dL = 2 \left[(d\beta^T) (X^T X \beta + x_1^T \lambda + \lambda - X^T Y) + (d\gamma^T) (D^T D \gamma - \lambda - D^T E_0) + (d\lambda) (x_1 \beta - m_R) + (d\lambda^T) (\beta - \gamma) \right] \quad (5.3-20)$$

Es ist vorteilhaft, dieses Differential übersichtlicher zu gestalten. Auf diese Weise wird man auch eine übersichtliche Form der Lösungsmatrix erhalten. Zu diesem Zwecke werden die folgenden expandierten Größen definiert:

$$\beta_e = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{expandierter variabler Massevektor,} \\ 3(n_w + n_o) + 1 \text{ Komponenten} \end{array} \quad (5.3-21)$$

$$(X^T X)_e = \begin{bmatrix} X^T X & 0 & I \\ 0 & D^T D & -I \\ I & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x_1^T \\ \\ 0 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{expandierte Normalmatrix mit quadratischen} \\ \text{Untermatrizen jeweils der Dimension } n_w + n_o: \\ \text{Normalmatrizen, Nullmatrix } 0, \text{ Einheitsmatrix } I. \\ \text{Der Einheitsvektor } x_1 \text{ in der Dimension } 3(n_w + n_o). \end{array} \quad (5.3-22)$$

$$(X^T)_e = \begin{bmatrix} X^T & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{expandierte transponierte Wagematrix mit } 3(n_w + \\ n_o) + 1 \text{ Zeilen und } 2n_w + n_d + n_o + 1 \text{ Spalten, die} \\ \text{Nullmatrizen geeignet dimensioniert.} \end{array} \quad (5.3-23)$$

$$Y_e = \begin{bmatrix} Y \\ E_0 \\ a \\ m_R \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{expandierter Wägewertvektor mit } 2n_w + n_d + n_o + \\ 1 \text{ Elementen} \end{array} \quad (5.3-24)$$

Die Gesamtzahl der Gleichungen ist entsprechend der Dimension der expandierten Normalmatrix $3(n_w + n_o) + 1$. Das ist genau die Anzahl der zu bestimmenden Komponenten des expandierten Massevektors. Es ist daher eine Lösung zu erwarten, falls das Wägeschema geeignet gewählt wurde. Unter Verwendung der oben eingeführten expandierten Größen wird das totale Differential der Lagrange-Funktion durch

$$dL = 2(d\beta_e^T) ((X^T X)_e \beta_e - (X^T)_e Y_e) \quad (5.3-25)$$

zusammengefasst.

Wenn man sich die Lagrange-Funktion als eine Funktion in einem Vektorraum der Dimension $3(n_w + n_o) + 1$ vorstellt, entspricht dL der Änderung, die sich ergibt, wenn die Koordinaten sich um $d\beta_e$ ändern. Der Gradient der Lagrange-Funktion ist daher

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_e} = 2((X^T X)_e \beta_e - (X^T)_e Y_e). \quad (5.3-26)$$

Nun gilt die folgende notwendige und hinreichende Bedingung:

Die Summe der Quadrate der Wägewert- und der Driftabweichungen sind ein Minimum und die Nebenbedingungen „Vektoridentität“ und „Bezugsnormal“ sind eingehalten genau dann, wenn beliebige Gradienten

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_e} = 0 \quad (5.3-27)$$

der Lagrange-Funktion Null sind.¹ Daraus ergibt sich schließlich die Bestimmungsgleichung für den expandierten Massevektor zu

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e \mathbf{M}_e = (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{Y}_e. \quad (5.3-28)$$

Der expandierte Massevektor

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m \\ \vdots \\ m_p \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ m_p \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.3-29)$$

stellt die vollständige Lösung sowohl für die Massewerte als auch die Vorlastwerte dar.²

Zur Prüfung, ob das Wägeschema korrekt gebildet wurde, so dass überhaupt eine Lösung möglich ist, berechnet man die Determinante der expandierten Normalmatrix. Nur wenn diese ungleich 0 ist, kann das Gesamtsystem der Gleichungen gelöst werden. Die Lösung ist dann

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{S} \mathbf{Y}_e \quad (5.3-30)$$

mit der Lösungsmatrix

$$\mathbf{S} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e. \quad (5.3-31)$$

5.3.1 Schritte zur Berechnung der Massewerte

Es werden jetzt die einzelnen Schritte zusammengestellt, die im Falle der Anwendung des Prinzips der geringsten Driftänderung durchzuführen sind.

Aufbau der expandierten Normalmatrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e$:

- Aufstellung der *Schemamatrix* \mathbf{X}_w (siehe Abschnitt 2.2).
- Ergänzung der Wägematrix durch die Auftriebsterme.
- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.3-3 bis 5.3-19.

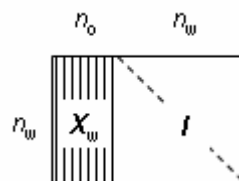


Abb. 5.3-3: Rechtsseitig Erweiterung auf \mathbf{X} durch Anhängen einer Einheitsmatrix \mathbf{I}

¹ Die notwendige Bedingung wird anhand von Gleichung 5.3-15 folgendermaßen deutlich:
Wenn die Summen der Quadrate der Wägewert- und Driftabweichungen bei erfüllten Nebenbedingungen und festen Lagrange-Multiplikatoren ein Minimum sind, ist es auch die Lagrange-Funktion, denn alle Nebenbedingungen sind identisch Null. Variationen der Lagrange-Multiplikatoren bei festem erweitertem Massevektor führen aufgrund der Nebenbedingungen zu keinen Änderungen von L .

Die hinreichende Bedingung ergibt sich folgendermaßen:
Wenn beliebige kleine Änderungen der Multiplikatoren bei jedem festen β keine Änderung von L bewirken, müssen die Nebenbedingungen erfüllt sein. Wenn bei festen Multiplikatoren β variiert wird und sich der Wert der Funktion L dabei nicht ändert, ändert sich auch nicht die Summe der Quadrate der Wägewert- und Driftabweichungen. Da diese nie negativ und von quadratischer Ordnung ist, kann sie nur ein Minimum (oder ohne Wägewert- und Driftabweichungen identisch Null) sein.
² Der Massevektor und der Vorlastwertvektor erscheinen doppelt im expandierten Massevektor. Dies ist korrekt, weil diese Vektoren in Verbindung mit den Inhalten „Driftabweichungen“ und „Wägewertabweichungen“ zweifach eingesetzt werden.

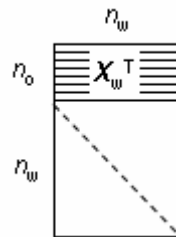


Abb. 5.3-4: Transponieren der Wägematrix: \mathbf{X}^T

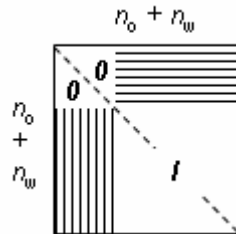


Abb. 5.3-5: Berechnung der normalisierten Wägematrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

- Die sich ergebende Struktur der Normalmatrix überprüfen: Oben links Diagonalmatrix mit n_o Diagonalelementen. Rechts unten Einheitsmatrix \mathbf{I} der Dimension n_w . Rechts oben die Wägematrix. Links unten die transponierte Wägematrix.



Abb. 5.3-6: Aufstellung der Vorlastwertbeziehungen \mathbf{X}_d

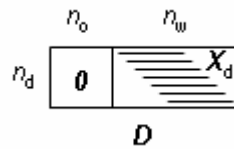


Abb. 5.3-7: Linksseitig Erweiterung auf Driftmatrix \mathbf{D} durch Anfügen einer Nullmatrix $\mathbf{0}$

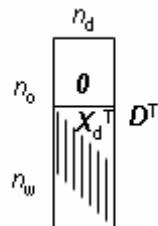


Abb. 5.3-8: Transponieren der Driftmatrix

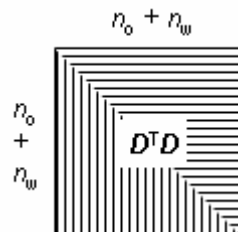


Abb. 5.3-9: Berechnung der normalisierten Driftmatrix $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$

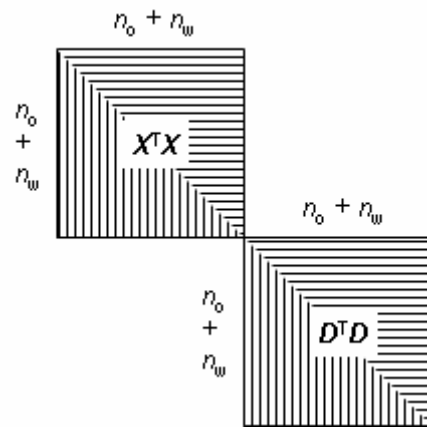


Abb. 5.3-10: Zusammenfügen der Normalmatrizen entlang der Diagonalen

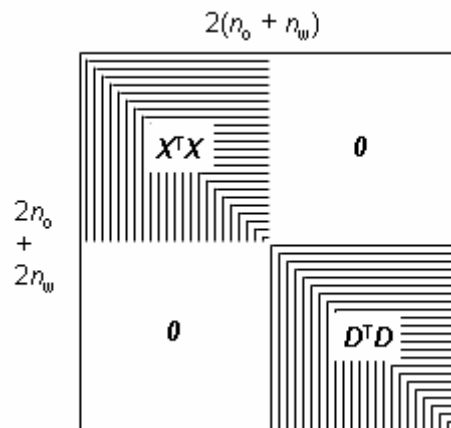


Abb. 5.3-11: Komplettieren durch Nullmatrizen 0

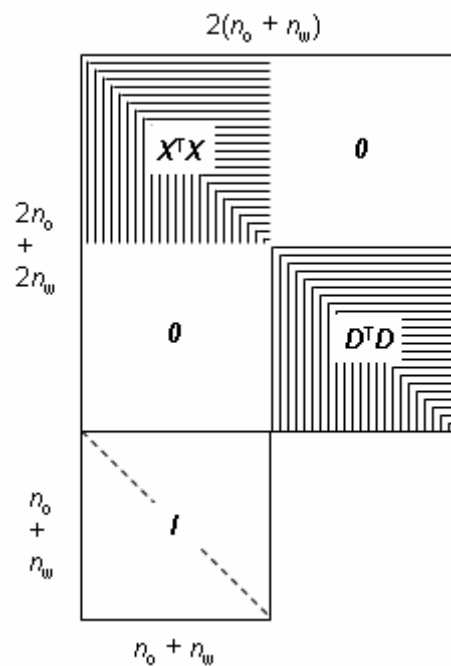


Abb. 5.3-12: Unten links Anhängen einer Einheitsmatrix I

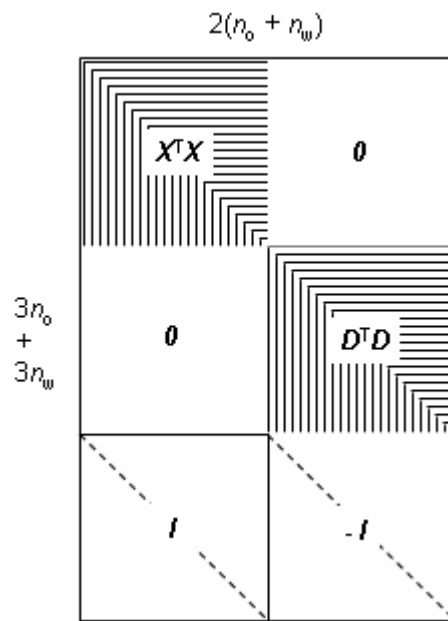


Abb. 5.3-13: Rechts von der Einheitsmatrix Ergänzung durch eine „negative Einheitsmatrix“ $-I$

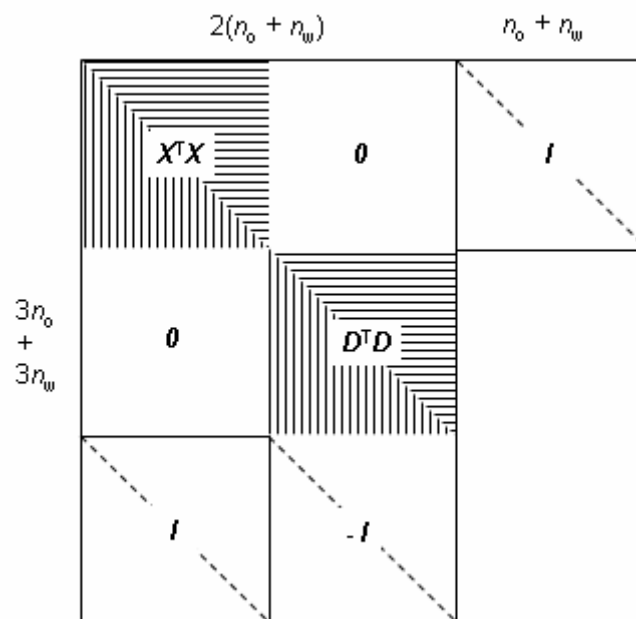


Abb. 5.3-14: Spiegelsymmetrisch oben rechts Anhängen einer Einheitsmatrix I

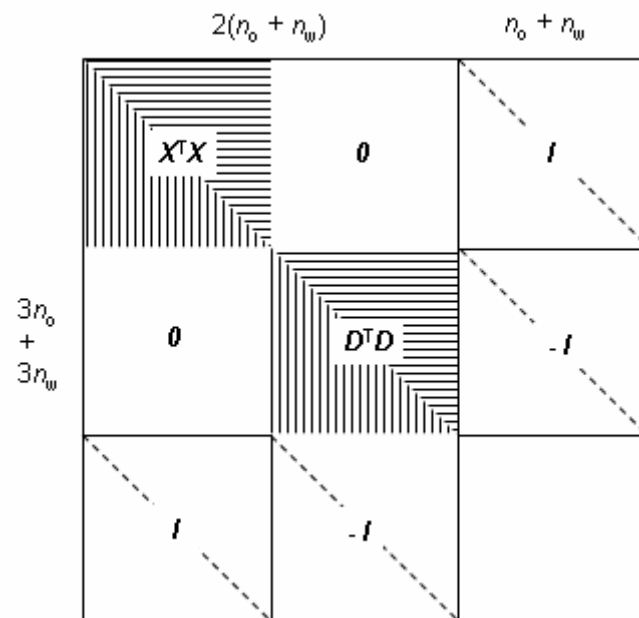


Abb. 5.3-15: Darunter Einfügen einer „negativen Einheitsmatrix“ $-I$

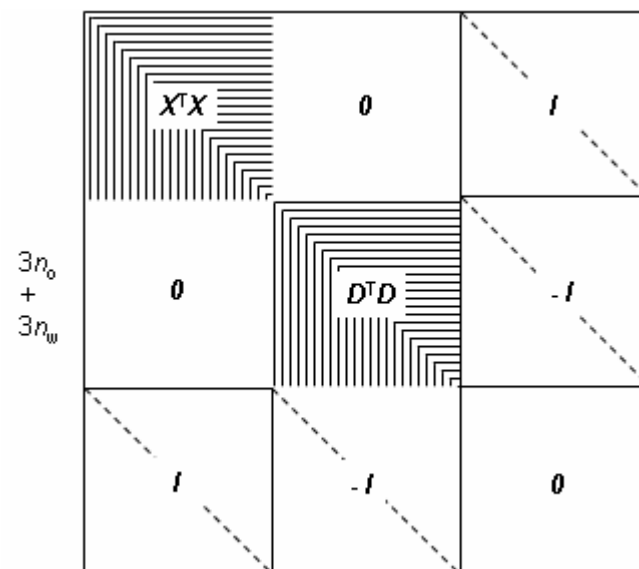


Abb. 5.3-16: Vervollständigung durch eine Nullmatrix 0

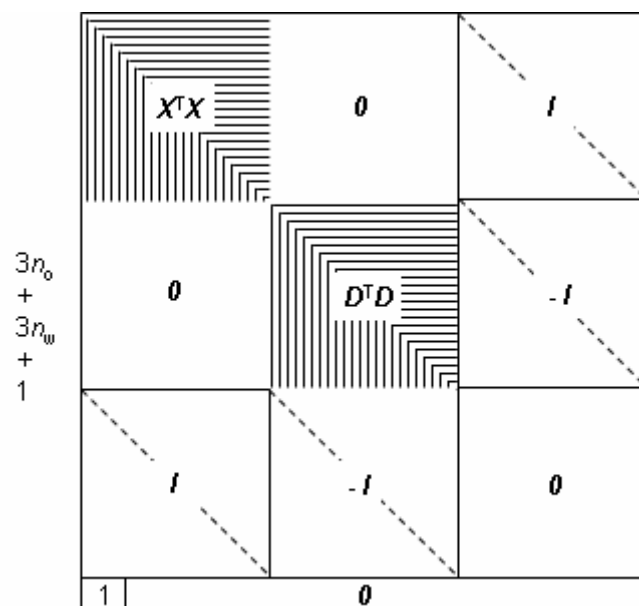


Abb. 5.3-17: Anfügen einer Zeile links mit einer 1, sonst mit Elementen 0

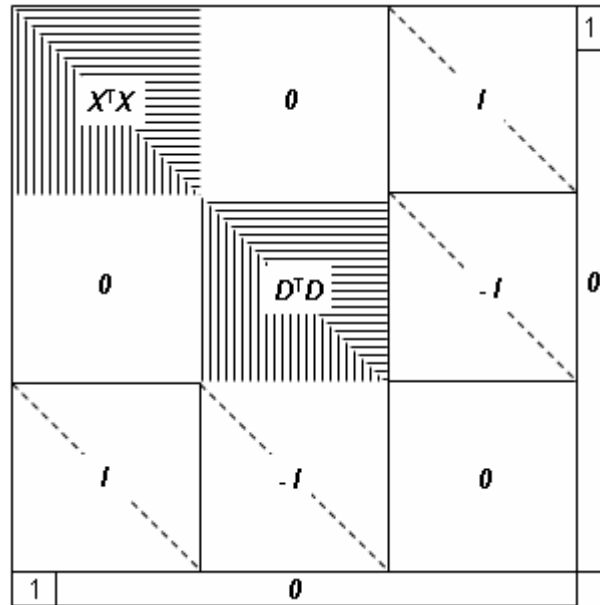


Abb. 5.3-18: Anfügen einer Spalte oben mit einer 1, sonst Elemente 0

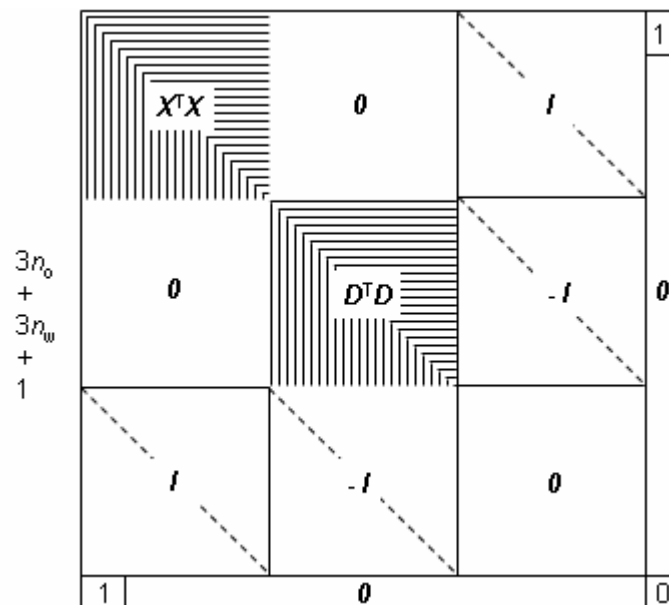


Abb. 5.3-19: Vervollständigung der Matrix durch eine 0: $(X^T X)_e$

- Überprüfung durch Bildung der Determinanten

Aufbau der expandierten transponierten Wägematrix X_e^T :

- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.3-20 und 5.3-22.

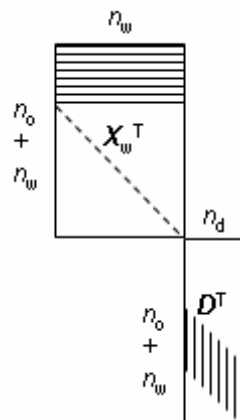


Abb. 5.3-20: Transponierte Driftmatrix an transponierte erweiterte Wägematrix X_e^T anfügen

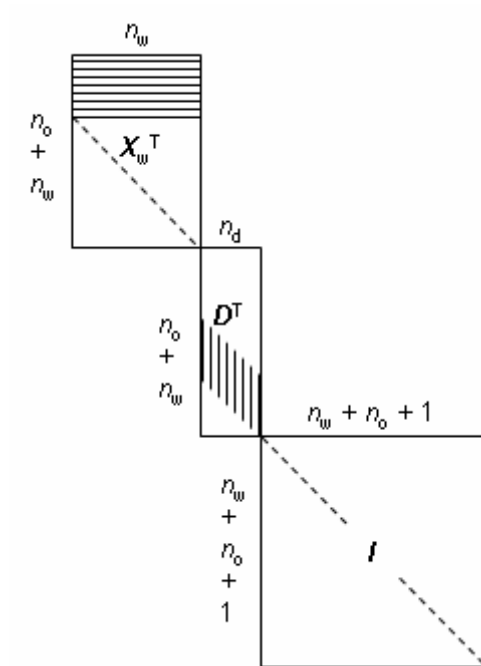


Abb. 5.3-21: Einheitsmatrix I an transponierte Driftmatrix D^T anfügen

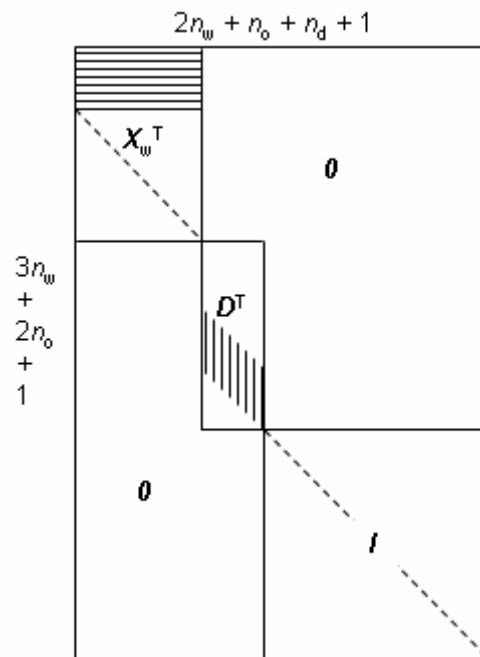


Abb. 5.3-22: Mit Elementen 0 vervollständigen

- Übereinstimmung der Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten der expandierten Normalmatrix prüfen.

Berechnung der Lösungsmatrix S :

- Die folgenden Schritte ergeben sich aus den Abbildungen 5.3-23 und 5.3-24.
- Die Invertierte Normalmatrix weist eine typische Struktur mit einem bestimmten Inhalt auf (siehe Abschnitt 5.4). Struktur und Inhalt überprüfen:

$$3(n_o + n_w) + 1$$

	0	0	0	1	1	n_o
	0	0	0	-1	-1	n_w
	0	0	-1	0	1	n_o
	0	0	0	-1	-1	n_w
	0	-1	0	0	0	n_o
	0	0	0	0	0	n_w
1	-1	1	-1	0	0	1

$3n_o + 3n_w + 1$

Abb. 5.3-23: Expandierte Normalmatrix invertieren

$$2n_w + n_d + n_o + 1$$

	0	0	1	1	n_o
	0	0	-1	-1	n_w
	0	-1	0	1	n_o
	0	0	-1	-1	n_w
	0	0	0	0	n_o
	0	0	0	0	n_w
	0	0	0	0	1
	$n_w + n_d$	n_o	n_w	1	

$3n_o + 3n_w + 1$

Abb. 5.3-24: Inverse mit der expandierten transponierten Wägematrix \mathbf{X}_e^T multiplizieren

- Struktur und Inhalt der Lösungsmatrix \mathbf{S} überprüfen (siehe Abschnitt 5.4).

Aufbau des expandierten Wägewertvektors:

- In Spaltenform Wägewerte listen.
- Spalte um Elemente $\mathbf{E}_0 = 0$ expandieren
- Spalte um Elemente 0 expandieren.
- Als letztes Element den Massewert des Normals hinzufügen.
- Zur Kontrolle Gesamtzahl der Elemente mit Spaltenzahl von \mathbf{X}_e^T vergleichen.

Massewerte berechnen:

- Lösungsmatrix \mathbf{S} mit expandiertem Wägewertvektor multiplizieren.
- Das erste Element ist der Massewert des Normals.
- Die nächsten Elemente sind die Massewerte der zu kalibrierenden Objekte.
- Entsprechend der Anzahl der Wägewerte sind die dann folgenden Elemente die Vorlastwerte.
- Alle weiteren Elemente sind nicht von weiterführender Bedeutung.

5.4 Eigenschaften der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix

In den Abschnitten 5.1 und 5.3 wurden die einzelnen Schritte bei der Entwicklung der Lösungsmatrizen graphisch dargestellt. Dabei wurden schon typische Strukturen der invertierten expandierten Normalmatrix und der Lösungsmatrix sichtbar. Dies trifft insbesondere für die äußeren Zeilen und Spalten der genannten Matrizen zu (siehe die Abbildungen 5.1-15, 5.1-16, 5.3-23 und 5.3-24). Bestimmte Elemente müssen demnach den Wert 0 oder 1 annehmen, unabhängig davon, welches *Wägeschema* gewählt wurde beziehungsweise welche *Wägewerte* und Auftriebsparameter eingegeben wurden. Zusätzlich zur Bindung dieser Elemente gibt es weitere strukturelle Zusammenhänge in Form linearer Beziehungen zwischen einzelnen Elementen. Insgesamt ist eine genauere Kenntnis über die zu erwartende Struktur der Lösung als Lösungskontrolle von Nutzen. Deshalb sollen in diesem Abschnitt die wesentlichen Strukturelemente der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix hergeleitet werden.

5.4.1 Zeile 1 und Spalte 1 der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix

Die folgenden Herleitung basiert auf bekannten Grundregeln bei der Matrixkalkulation [9], [11], [15]. Zur Veranschaulichung dient die Abbildung 5.4-1. Die erste Zeile der Inversen ergibt sich aus der Entwicklung der Adjunkten entlang der ersten Spalte und anschließender Transposition, so dass die so entwickelte Spalte zur ersten Zeile wird. Jede der Adjunkten, mit Ausnahme der letzten, entsteht aus einer Untermatrix, die in der letzten Zeile nur Elemente 0 enthält. Aus diesem Grunde ist nur das letzte Element der 1. Zeile der Inversen ungleich 0.

Es wird nun gezeigt, dass die ECKEelemente der Inversen in den Positionen oben rechts und unten links gleich 1 sind:

Nach Anwendung des Entwicklungssatzes für Determinanten von Laplace auf die erste Spalte der expandierten Normalmatrix und danach erneut auf die letzte Spalte der sich ergebenden Untermatrix folgt für die Determinanten

$$|(X^T X)_e| = -|A|. \quad (5.4-1)$$

Dabei ist A die Teilmatrix von $(X^T X)_e$, die sich durch Streichung der äußeren Zeilen und Spalten ergibt. Die Adjunkte an den ECKEelementen der expandierten Normalmatrix ergeben sich ebenfalls zu $-|A|$. Die ECKEelemente der Inversen $(X^T X)_e^{-1}$ errechnet man aus den jeweils gegenüberliegenden Adjunkten der Ausgangsmatrix $(X^T X)_e$ dividiert durch die Determinante $|(X^T X)_e|$. Daraus erhält man für die ECKEelemente den Wert 1.

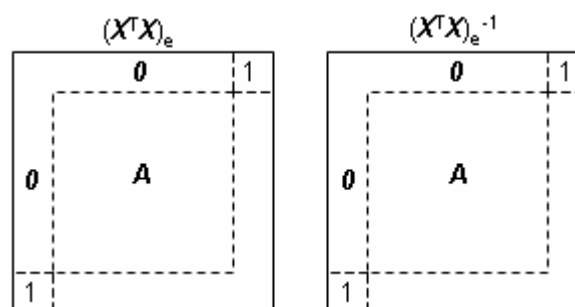


Abb. 5.4-1: Expandierte Normalmatrix und Inverse

Die Lösungsmatrix S ergibt sich nach den Gleichungen 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31 aus der Multiplikation mit der expandierten transponierten Wägematrix X_e^T . Die letzte Zeile dieser Matrix hat nur am Ende ein Element gleich 1, sonst nur Elemente gleich 0 (siehe die Gleichungen 5.1-12 und 5.3-23). Aus diesem Grunde sind die Elemente der ersten Zeile der Lösungsmatrix bis auf das letzte ebenfalls gleich 0. Das letzte Element ist wieder gleich 1.

5.4.2 Spaltenvergleich zwischen der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix

Die Lösungsmatrix ergibt sich nach den Gleichungen 5.1-12 oder 5.3-23 durch Multiplikation der Normalmatrix-Inversen $(X^T X)_e^{-1}$ mit der expandierten transponierten Wägematrix X_e^T . In der Abbildung 5.4-2 sind die in Frage kommenden Teilmatrizen dargestellt.

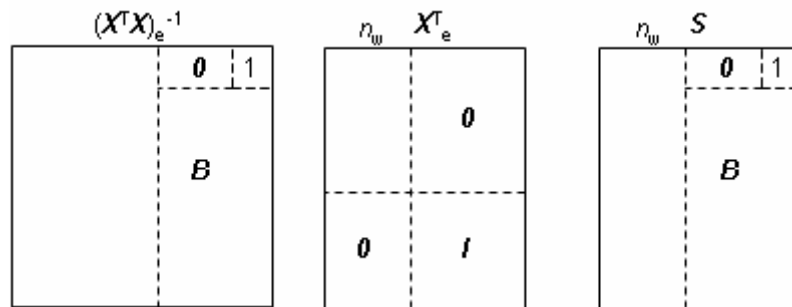


Abb. 5.4-2: Matrixvergleich zwischen der Inversen und der Lösungsmatrix

Nach den Gleichungen 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31 ist unmittelbar zu erkennen, dass die Teilmatrizen **B** der Normalmatrix-Inversen und der Lösungsmatrix identisch sind. Es handelt sich um die Spalten der Lösungsmatrix, die den Spaltenzahlen $> n_w$ entsprechen.

5.4.3 Summation von Zeilen-Komponenten der Lösungsmatrix

Das System der *Wägeggleichungen* zum Beispiel in der Form von Gleichung 2.2-9 muss folgende Eigenschaft wiedergeben:

Verändert man bei konstanten Massewerten alle Wägewerte um gleiche Beträge dy , so verändern sich auch um genau diese Beträge die *Vorlastwerte*. In einem „Gedankenexperiment“ wäre dies gleichbedeutend mit einer Wiederholung der gleichen Messfolge unter zufällig identischen Bedingungen, jedoch unter einem anderen Ausgangswert für die Vorlast, das heißt nach Aufbringen beziehungsweise Entfernen einer bei allen Wägungen gleichen punktförmigen Zusatzlast. Dieser Zusammenhang soll in differentieller Form ausgearbeitet werden.

Laut Voraussetzung sind die infinitesimalen Wägewertänderungen in diesem Falle

$$dy = d(n_w)dy \quad (5.4-2)$$

Dabei ist $d(n_w)$ ein n_w – dimensionaler Vektor mit allen Komponenten gleich 1. Da die Massen sich nicht ändern können, gilt für den *Massevektor*

$$dm = 0 \quad (5.4-3)$$

Die Vorlastwerte hingegen müssen sich so verändern wie die Wägewerte:

$$dm_p = dy \quad (5.4-4)$$

Sei nun $S(n_o | n_w)$ die Teilmatrix der Lösungsmatrix **S**, die sich aus den ersten n_o Zeilen und n_w Spalten ergibt. Dann ergibt 5.4-3 aus der Lösungsformel 5.1-17 beziehungsweise 5.3-30

$$S(n_o | n_w)d(n_w) = 0. \quad (5.4-5)$$

Diese Beziehung besagt nichts anderes als

$$\sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} = 0 \quad \dots \quad i \leq n_o. \quad (5.4-6)$$

Das heißt, dass die Zeilensummen der Elemente der Lösungsmatrix längs der Spaltenpositionen $\leq n_w$ gleich 0 sind. Die Summe der Koeffizienten der Kalibrierformel

$$m_i = \sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} Y_j. \quad (5.4-7)$$

müssen daher stets 0 ergeben (Abb. 5.4-3).

Ferner sei $\mathbf{S}(n_o < i \leq n_o + n_w \mid n_w)$ die Teilmatrix, die von den Zeilen $n_o + 1$ bis $n_o + n_w$ und den ersten n_w Spalten der Lösungsmatrix gebildet wird. Dann ergeben 5.4-2 und 5.4-3 aus der Lösungsformel nach den Gleichungen 5.1-17 beziehungsweise 5.3-30

$$\mathbf{S}(n_o < i \leq n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{d}(n_w) = \mathbf{d}(n_w). \quad (5.4-8)$$

Diese Beziehung ist mit

$$\sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} = 1 \quad \dots \quad n_o < i \leq n_o + n_w \quad (5.4-9)$$

gleichbedeutend. Das heißt, dass die Zeilensummen der Elemente der Lösungsmatrix für die Vorlastwerte längs der Spaltenpositionen $\leq n_w$ gleich 1 sein müssen. Die Summe der Koeffizienten der Kalibrierformel der Vorlastwerte

$$m_{pi} = \sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} Y_j. \quad (5.4-10)$$

müssen daher stets 1 ergeben (Abb. 5.4-3).

	n_w	
n_o	$\Sigma \rightarrow 0$	0 1
n_w	$\Sigma \rightarrow 1$	

Abb. 5.4-3: Komponentensummen der Lösungsmatrix

5.4.4 Letzte Spalte der Lösungsmatrix

Man stelle sich ein weiteres „Gedankenexperiment“ vor:

Ein Kalibriervorgang werde an den gleichen Objekten wiederholt. Die Objekte seien punktförmig. Es gibt also keine Auftriebskräfte. Alle Einflüsse auf die Wägeeinrichtung seien zufällig identisch zum ersten Messvorgang. Der Verlauf der Vorlastwerte bleibt also gleich. Im zweiten Durchgang sei jedoch allen Objekten ein zusätzliches Massestück zugelegt. Alle Massewerte ändern sich also so, wie sich die Masse m_R der Bezugslast ändert. Dann ist zu erwarten, dass sich alle Wägewerte im zweiten Durchgang um genau diese Zulage ändern.

Dieser Zusammenhang soll in differentieller Form ausgearbeitet werden. Laut Voraussetzung sind die infinitesimalen Änderungen des Massevektors

$$d\mathbf{m} = \mathbf{d}(n_o) dm_R \quad (5.4-11)$$

Dabei ist $\mathbf{d}(n_o)$ ein n_o – dimensionaler Vektor mit allen Komponenten gleich 1. Da die Vorlastwerte im zweiten Durchgang genau so sein sollen wie im ersten, gilt für den Vorlastvektor

$$d\mathbf{m}_p = 0 \quad (5.4-12)$$

Nach diesen Voraussetzungen müssen die infinitesimalen Wägewertänderungen gleich

$$d\mathbf{y} = \mathbf{d}(n_w) dm_R \quad (5.4-13)$$

sein. Die Änderungen des expandierten Wägewertvektors sind nach den Gleichungen 5.1-13 beziehungsweise 5.3-24

$$d\mathbf{y}_e = \mathbf{d}(1 \leq i \leq n_w, i = i_{\max}) dm_R. \quad (5.4-14)$$

Falls die *Driftänderungen* nach Abschnitt 5.1 unfrei gesetzt sind, ist $i_{\max} = n_w + n_d + 1$. Bei freien Driftänderungen nach Abschnitt 5.3 ist $i_{\max} = 2n_w + n_d + n_o + 1$. Der Vektor $\mathbf{d}(1 \leq i \leq n_w, i = i_{\max})$ entspricht einem Vektor mit denjenigen Komponenten gleich 1, die durch i gegeben sind. Die übrigen Komponenten sind 0.

Sei nun $\mathbf{S}(n_o | 1 \leq j \leq n_w, j = j_{\max})$ die Teilmatrix, die von den Zeilen 1 bis n_o , den Spalten 1 bis n_w und der letzten Spalte j_{\max} der Lösungsmatrix \mathbf{S} gebildet wird. Bei unfreien Driftänderungen nach Abschnitt 5.1 ist die Position der letzten Spalte $j_{\max} = n_w + n_d + 1$. Im Falle des Prinzips der freien Driftänderungen nach Abschnitt 5.3 liegt die letzte Spalte bei $j_{\max} = 2n_w + n_d + n_o + 1$. Dann ergeben 5.4-11 und 5.4-14 aus der Lösungsformel nach den Gleichungen 5.1-17 beziehungsweise 5.3-30

$$\mathbf{S}(n_o | 1 \leq j \leq n_w, j = j_{\max}) \mathbf{d}(1 \leq i \leq n_w, i = i_{\max}) = \mathbf{d}(n_o). \quad (5.4-15)$$

Diese Beziehung ist mit

$$\sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} + S_{ij_{\max}} = 1 \quad \dots \quad 1 \leq i \leq n_o \quad (5.4-16)$$

gleichbedeutend. Die linke Summe in dieser Gleichung verschwindet gemäß 5.4-6. Daraus folgt

$$S_{ij_{\max}} = 1 \quad \dots \quad 1 \leq i \leq n_o, \quad (5.4-17)$$

die ersten n_o Elemente der letzten Spalte der Lösungsmatrix sind also alle gleich 1.

Diese Beziehung gilt nur dann, wenn die Objekte als Massepunkte angenommen werden. Wenn man den Luftauftrieb bei realen Objekten berücksichtigen würde, wären diese Elemente der Lösungsspalte für $i > 1$ um Auftriebsterme zu korrigieren. Aufgrund des relativ geringen Verhältnisses der Luftdichte zu den Materialdichten der Objekte ist jedoch stets ein Wert nahe 1 zu erwarten.

Es werden die sich nun anschließenden Zeilen der Lösungsmatrix \mathbf{S} untersucht, die die Lösung für die Vorlastwerte darstellen. Es handelt sich um die Teilmatrix $\mathbf{S}(n_o < i \leq n_o + n_w | 1 \leq j \leq n_w, j = j_{\max})$. In diesem Falle ergibt sich aus Gleichung 5.4-14

$$\mathbf{S}(n_o < i \leq n_o + n_w | 1 \leq j \leq n_w, j = j_{\max}) \mathbf{d}(i \leq n_w, i = i_{\max}) = 0. \quad (5.4-18)$$

Diese Beziehung bedeutet

$$\sum_{j=1}^{n_w} S_{ij} + S_{ij_{\max}} = 0 \quad \dots \quad n_w < i \leq n_w + n_o. \quad (5.4-19)$$

Da nach Gleichung 5.4-9 die linke Summe für jede Zeile gleich 1 ist, folgt

$$S_{j_{\max}} = -1 \quad \dots \quad n_o < i \leq n_o + n_w. \quad (5.4-20)$$

Die Elemente in den Positionen $n_o + 1$ bis $n_o + n_w$ der letzten Spalte der Lösungsmatrix sind also alle gleich -1.

Bei Berücksichtigung des Luftauftriebs an Objekten endlicher Dichte sind die Werte dieser Komponenten aus den oben genannten Gründen nur ungefähr gleich -1.

	n_w		
n_o	$\Sigma \rightarrow 0$	0	1
			≈ 1
n_w	$\Sigma \rightarrow 1$		≈ 1

Abb. 5.4-4: Letzte Spalte der Lösungsmatrix

5.4.5 Nullelemente der letzten Spalte der Lösungsmatrix

Es soll nun noch gezeigt werden, dass die Elemente am Ende der letzten Spalte der Lösungsmatrix \mathbf{S} alle gleich 0 sind. Es handelt sich um die Positionen $i > n_o + n_w$, $j = j_{\max}$, wobei wie schon bekannt j_{\max} davon abhängt, ob das Verfahren der unfreien oder der freien Driftänderungen gewählt wurde. Dazu wird hier vorweg genommen, dass der Lagrange-Multiplikator λ stets gleich 0 ist. Die Herleitung wird im Zusammenhang mit Gleichung 5.4-31 nachgeholt.

Man geht von den expandierten Normalengleichungen 5.1-15 beziehungsweise 5.3-28 aus, um – nur gedanklich – die expandierte Normalmatrix in eine Dreiecksmatrix umzuwandeln. Hierbei wird das als Gauß-Algorithmus benannte Verfahren angewandt, welches die Lösung linearer Gleichungen mit Hilfe einer Dreieckszerlegung ermöglicht [9], [11], [15]. Auf diese Weise entsteht aus der expandierten Normalengleichung ein gestaffeltes Gleichungssystem. Die Koeffizienten des expandierten Massevektors sind unterhalb der Diagonalen alle 0. Ausgenommen ist im vorliegenden Fall die letzte Zeile.

Die Abbildung 5.4-5 zeigt die sich ergebende Struktur der Gleichung nach der Umwandlung. Die Koeffizienten im Feld A sind den Massen und den Vorlastwerten, also dem erweiterten Massevektor \mathbf{M} zugeordnet. Die Koeffizienten in Feld L wirken auf die Komponenten des Vektors λ der Lagrange-Multiplikatoren. Der Vektor in der Spalte I stellt die Koeffizienten des Lagrange-Multiplikators λ dar. Mit dem Verfahren der Dreieckszerlegung werden auch die Komponenten des expandierten Wägewertvektors miteinander kombiniert. Wenn die Dreiecksstruktur erreicht ist, sind Koeffizienten im Feld B entstanden, die nun auf die Komponenten des expandierten Wägewertvektors wirken. Die Spalte rechts von B bleibt bei diesem Vorgang unverändert. Sie entspricht der letzten Spalte der expandierten transponierten Wägematrix \mathbf{X}_e^T . Die letzte Zeile, liefert die einzige Gleichung, die den Massewert m_R des Normals enthält. Die Koeffizienten im Feld L in den Zeilen unterhalb von A liefern lineare Beziehungen, die nur noch die Lagrange-Multiplikatoren enthalten. Da $\lambda = 0$ ist, kann man von der vorletzten Zeile ausgehend durch Rückwärtseinsetzen unabhängig von den Komponenten des expandierten Massevektors \mathbf{M} alle Komponenten des Multiplikator-Vektors λ errechnen. Wie aus der Abbildung ersichtlich, werden die Komponenten von λ ausschließlich durch \mathbf{Y} (und gegebenenfalls durch die Driftänderungen \mathbf{E}) gebildet. Sie können demnach nicht von m_R abhängen.

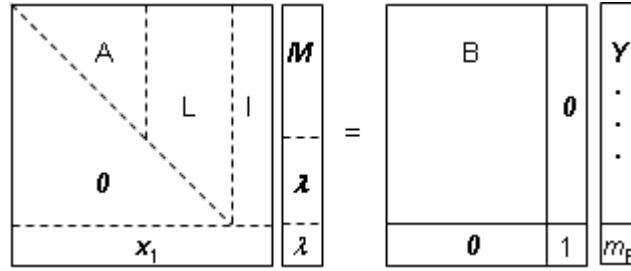


Abb. 5.4-5: Dreieckszerlegung der Normalgleichungen

Da die Lösungsgleichungen für beliebige Werte des Normals erfüllt sein müssen, bedeutet dies nach den Gleichungen 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31, dass die Lösungsmatrix **S** in der letzten Spalte in den Positionen $i > n_o + n_w + 1$ nur aus 0-Elementen besteht.

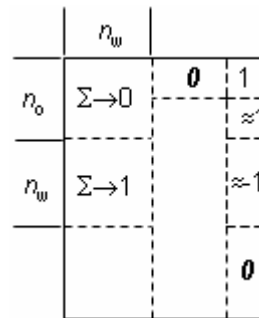


Abb. 5.4-6: Letzte Spalte der Lösungsmatrix

5.4.6 Freie Driftänderungen: Nullmatrix mit n_o Zeilen

Die Lösungsmatrix **S** enthält im Falle des Modells freier Driftänderungen eine vollständige Nullmatrix mit n_o Zeilen. Sie beginnt mit der Zeile $2(n_o + n_w) + 1$. Dies ersieht man zum Beispiel der Abbildung 5.3-24. Um diese allgemeine Eigenschaft der Lösungsmatrix nachzuweisen, muss zunächst gezeigt werden, dass die Lösung der ersten n_o Komponenten des Vektors λ der Lagrange-Multiplikatoren in Gleichung 5.3-21 ein Nullvektor ist.

Wenn man die betreffenden Zeilen der Gleichung 5.3-28 unter Verwendung von 5.3-23 und 5.3-24 ausführt, erhält man

$$D^T D \gamma - \lambda = D^T E_0. \quad (5.4-21)$$

Da die ersten n_o Elemente der transponierten Driftmatrix alle 0 sind (siehe die Abbildung 5.3-7), gilt erwartungsgemäß

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_o} = 0. \quad (5.4-22)$$

Im expandierten Massevektor ergeben sich die oben betrachteten Lagrange-Multiplikatoren aus den Zeilen $2(n_w + n_o) \leq i \leq 2(n_w + n_o) + n_o$. Für jede dieser Zeilen muss also

$$S(2(n_w + n_o) \leq i \leq 2(n_w + n_o) + n_o | j_{\max}) Y_e = 0. \quad (5.4-23)$$

für beliebige Werte von **Y**, **E**₀, **a** und m_R erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn

$$S_{ij} = 0 \quad \dots \quad 2(n_w + n_o) < i \leq 2(n_w + n_o) + n_o, 1 \leq j \leq j_{\max} \quad (5.4-24)$$

ist.

5.4.7 Letzte Zeile der Lösungsmatrix

Es soll nun die letzte Zeile der Lösungsmatrix untersucht werden. Diese Zeile befindet sich im Falle der unfreien Driftänderungen bei $i_{\max} = n_o + n_w + 1$ und im Falle der freien Driftänderungen bei $i_{\max} = 3(n_o + n_w) + 1$. Dazu wird zunächst der Lagrange-Multiplikator λ berechnet. Dies soll bei beiden Verfahren, also bei den unfreien Driftänderungen nach Abschnitt 5.1 und den freien Driftänderungen nach Abschnitt 5.3 geschehen. Hierzu geht man von den erweiterten Normalengleichungen 5.1-15 beziehungsweise 5.3-28 aus. Sie wurde als Bestimmungsgleichung des expandierten Massevektors \mathbf{M}_e hergeleitet, dessen letztes Element λ ist.

Wenn man zur Gauß-Transformation die Matrixmultiplikation $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ ausführt, kann man unmittelbar erkennen, dass sich die Diagonalelemente für $i = 1 \dots n_o$ wie folgt berechnen lassen (siehe die Abbildung 5.1-3, oben links):

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{eij} = \sum_{j=n_o+1}^{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{eij} \quad \dots \text{ ohne Luftauftrieb} \quad (5.4-25a)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_w} X_{wji} \quad (5.4-25b)$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{eij} = \sum_{j=n_o+1}^{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{eij} \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_j} \right) \quad \dots \text{ mit Luftauftrieb} \quad (5.4-25c)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_w} X_{wji} \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_j} \right) \quad (5.4-25d)$$

In den Gleichungen c und d wurde der Luftauftrieb berücksichtigt. In diesem Falle wurde \mathbf{X}_w nach Gleichung 2.2-5 durch den der Auftriebsterm $-\mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}$ ergänzt.

Die Elemente der ersten Zeile der erweiterten Normalengleichungen $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e$ für $j \leq n_w$ entsprechen der Gleichung 5.4-21 für $i = 1$. Da sie dem Normal zugeordnet ist, ist die Materialdichte $\rho_1 = \rho_R$. In der ersten Zeile ist ferner:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{e1j} = 0 \quad \text{für} \quad n_o + n_w < j < j_{\max} \quad \dots \text{ unfreie Driftänderungen} \quad (5.4-26a)$$

$$n_o + n_w < j < j_{\max}, j \neq 2(n_o + n_w) + 1 \quad \dots \text{ freie Driftänderungen} \quad (5.4-26b)$$

Entsprechend der Definition der expandierten Normalmatrix ist das letzte Element der ersten Zeile nach Gleichung 5.1-11 beziehungsweise 5.3-22

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{e1j_{\max}} = 1. \quad (5.4-27)$$

Wenn man die Normalengleichung 5.1-15 beziehungsweise 5.3-28 in der ersten Zeile ausgeführt, ist die erweiterte Normalmatrix auf der linken Seite mit dem expandierten Massevektor \mathbf{M}_e nach Gleichung 5.1-16 beziehungsweise 5.3-29 zu multiplizieren. Aufgrund von Gleichung 5.4-22 entfallen im Falle der unfreien Driftänderungen in der ersten Zeile alle Terme mit den Elementen des Vektors λ . Im Falle der freien Driftänderungen entfallen wegen $\lambda_1 = 0$ nach Gleichung 5.4-22 ebenfalls alle Terme der Positionen $n_o + n_w < j < j_{\max}$. Man erhält somit in beiden Fällen das Gleichungssystem

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{e11} m_R + \sum_{j=1}^{n_w} X_{w1j} \left(1 - \frac{\rho_{aj}}{\rho_R} \right) m_{pj} + \lambda = \sum_{i=1}^{n_w} X_{wi1} \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_R} \right) \langle Y_i \rangle. \quad (5.4-28)$$

Für den Lagrange-Multiplikator λ ergibt sich also

$$\lambda = -(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{e11} m_R + \sum_{i=1}^{n_w} X_{wi1} \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_R} \right) (\langle Y_i \rangle - m_{pi}). \quad (5.4-29)$$

Die Differenzen $\langle Y_i \rangle - m_{pi}$ können jetzt mit Hilfe der einzelnen Wägleichungen

$$\left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_R}\right) m_R + m_{pi} = \langle Y_i \rangle. \quad (5.4-30)$$

eliminiert werden (siehe Gleichung 2.1-3). Dann liefert die Gleichung 5.4-21 für $i = 1$ die Lösung

$$\lambda = 0. \quad (5.4-31)$$

Mit diesem Ergebnis geht man nun in die letzte Zeile der Lösungsgleichung (j_{\max}). Der expandierte Wägewertvektor enthält nach den Gleichungen 5.1-13 (für $\mathbf{E} = 0$) beziehungsweise 5.3-24 (für $\mathbf{E}_0 = 0$ und $\mathbf{a} = 0$) nur die einzelnen Wägewerte Y_i und die Masse m_R des Normals. Unabhängig von diesen Werten muss stets

$$\mathbf{S}_{i_{\max}} \mathbf{Y}_e = 0 \quad (5.4-32)$$

erfüllt sein. Daraus folgt für die Lösungsmatrix:

$$\mathbf{S}_{i_{\max}j} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n_w \quad \text{und} \quad j = j_{\max} \quad (5.4-33)$$

Im Falle der unfreien Driftänderungen wird nun bedacht, dass auch $\mathbf{E} \neq 0$ sein kann. Bei den freien Driftänderungen wären auch $\mathbf{E}_0 \neq 0$ und $\mathbf{a} \neq 0$ möglich. Da die Lösung auf beliebige vorgegebene Inhomogenitäten \mathbf{E} beziehungsweise \mathbf{E}_0 und \mathbf{a} anwendbar sein muss, gilt

$$\mathbf{S}_{i_{\max}j} = 0 \quad \text{für} \quad n_w < j < j_{\max}. \quad (5.4-34)$$

Zusammenfassend ist also festzustellen, dass die letzte Zeile der Lösungsmatrix stets eine Nullzeile sein muss.

	n_w		
n_o	$\Sigma \rightarrow 0$	0	1
			≈ 1
n_w	$\Sigma \rightarrow 1$		≈ 1
			0
		0	

Abb. 5.4-7: Letzte Zeile der Lösungsmatrix

In der Abbildung 5.4-7 sind die einzelnen Ergebnisse der Strukturuntersuchung der Lösungsmatrix noch einmal dargestellt. Sollte diese Struktur bei einer Anwendung nicht hiermit übereinstimmen, liegen Rechenfehler vor.

5.4.8 Multiplikation mit der Wägematrix

Mit Hilfe der Lösungsgleichung und der Wägleichung werden nachfolgend Konsistenzgleichungen aufgestellt, aus denen sich weitere Eigenschaften der Lösungsmatrix herleiten lassen. Dazu stelle man sich Wiederholungen von *Wägereihen* vor, bei denen idealer Weise die Luftdichten und alle Einflussgrößen der Vorlastwerte bei jeder Reihe die gleichen Werte durchlaufen. Als variable Größen werden die Wägewerte \mathbf{Y} und der Massewert m_R des Bezugsnormals angesehen. Die Objektdichten bleiben konstant, so dass bei jeder Wägereihe stets die gleiche Lösungsmatrix und die gleiche Wägematrix vorliegen. Die ersten n_w Komponenten des expandierten Wägewertvektors

und sein letztes Element werden also beliebig variiert. Dann gilt in differenzieller Schreibweise die Lösungsgleichung

$$d\mathbf{M} = \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) d\mathbf{Y} + \mathbf{S}(n_o + n_w \mid j_{\max}) dm_R. \quad (5.4-35)$$

Unter Anwendung der differentiellen Wägleichung

$$\mathbf{X} d\mathbf{M} = d\mathbf{Y} - d\langle \mathbf{e} \rangle. \quad (5.4-36)$$

entsteht die Gleichung

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{XS}(n_o + n_w \mid n_w) d\mathbf{Y} + \mathbf{XS}(n_o + n_w \mid j_{\max}) dm_R + d\langle \mathbf{e} \rangle. \quad (5.4-37)$$

Die Gleichung 5.4-37 muss für beliebige Änderungen der infinitesimalen Größen erfüllt sein. Daraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Lösungsmatrix:

1. Fall: Variation nur des Massewertes des Bezugsnormals

In diesem Fall ist der Vektor der Wägewerte konstant. Dann bleibt auch der Vektor der Wägewertabweichungen unbeeinflusst. Aus der Gleichung 5.4-37 ergibt sich

$$\mathbf{XS}(n_o + n_w \mid j_{\max}) = 0. \quad (5.4-38)$$

Da die Wägematrix sich nach Gleichung 5.1-12 beziehungsweise 5.3-23 in die Bestandteile $\mathbf{X}(n_w \mid n_o)$ und \mathbf{I} aufteilt, kann man auch

$$\mathbf{X}(n_w \mid n_o) \mathbf{S}(n_o \mid j_{\max}) + \mathbf{S}(n_o < i \leq n_o + n_w \mid j_{\max}) = 0. \quad (5.4-39)$$

schreiben.¹ Greift man eine Wägenummer i heraus, bei der sich ein Objekt $j(i)$ auf dem Lastaufnehmer befindet, so gilt demnach:

$$\mathbf{S}(i \mid j_{\max}) = - \left(1 - \frac{\rho_{ai}}{\rho_{j(i)}} \right) \mathbf{S}(j(i) \mid j_{\max}) \quad \dots \quad n_o < i \leq n_o + n_w \quad (5.4-40)$$

Da die Luftauftriebsterme gegenüber der 1 klein sind, kann man aus dieser Gleichung ersehen, dass die Elemente der letzten Spalte der Lösungsmatrix, bis zur Zeile $n_o + n_w$ dem Betrage nach etwa gleich groß, die Vorzeichen bei $i > n_o$ und $i \leq n_o$ aber entgegengesetzt sind (siehe die Abbildung 5.4-7).

2. Fall: Variation nur der Wägewerte

Die Ergebnisse aus der Variation einzelner Wägewerte sind nur dann brauchbar, wenn die jeweiligen ausgeglichenen Wägewertabweichungen eliminiert sind. Dies ist durch Summation aller Komponenten möglich, denn nach dem Ausgleich muss die mittlere Wägewertabweichung gleich 0 sein. Dies bedeutet

$$\mathbf{d}^T(n_w) \langle \mathbf{e} \rangle = 0. \quad (5.4-41)$$

Somit wird aus 5.4-37 die Konsistenzbedingung

$$\mathbf{d}^T(n_w) d\mathbf{Y} = \mathbf{d}^T \mathbf{XS}(n_o + n_w \mid n_w) d\mathbf{Y}. \quad (5.4-42)$$

Da diese Bedingung für jede Wägewertkomponente erfüllt sein muss, gilt für jede Spalte der Lösungsmatrix

¹ Im Falle der freien Driftänderung

$$\mathbf{d}^T(n_w)\mathbf{X}\mathbf{S}(n_o + n_w \mid i) = 1 \quad \dots \quad i \leq n_w. \quad (5.4-43)$$

Wenn man also die Lösungsmatrix mit der Wägematrix von links multipliziert erhält man eine Schar von (relevanten) Spaltenvektoren. Die Summe der Komponenten dieser Vektoren ist stets gleich 1.

Es stellt sich nun die Frage nach einem entsprechenden Ergebnis, wenn man die sich ergebenden Zeilenvektoren addiert. Dazu wird die Symmetrie des expandierten Produkts festgestellt. Sie ergibt sich aus den Bestandteilen der Lösungsmatrix nach den Gleichungen 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31:

$$\mathbf{X}_e \mathbf{S} = \mathbf{X}_e (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{X}_e^T = (\mathbf{X}_e \mathbf{S})^T \quad (5.4-44)$$

Aufgrund der Symmetrie ergeben also auch die Summen der ersten n_w Zeilenelemente stets 1.

5.4.9 Darstellung der einzelnen Komponenten durch Brüche

Die nun folgende Betrachtung betrifft die Struktur der Lösungsmatrix, wie sie für den Fall der Luftdichte $\rho_a = 0$ beziehungsweise im Idealfall unendlicher Dichte, also bei Massepunkten, vorläge.

Unabhängig von der Wahl des Driftmodells errechnet sich die Lösungsmatrix aus der Invertierung der expandierten Normalmatrix und Multiplikation mit der expandierten transponierten Wägematrix. Entsprechend den Rechenregeln bei der Invertierung von Matrizen ist die invertierte Normalmatrix

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} = \frac{1}{|(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e|} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^* \quad (5.4-45)$$

Hierbei symbolisieren

$$|(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e| \quad \dots \quad \text{die Determinante der Normalmatrix} \quad (5.4-46)$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^* \quad \dots \quad \text{die adjungierte Normalmatrix- [9], [11], [15].} \quad (5.4-47)$$

Da die Komponenten der adjungierten Normalmatrix aus Unterdeterminanten gebildet werden, sind sie im gegebenen Fall verschwindender Auftriebskorrektur stets ganze Zahlen. Auch die Determinante der Normalmatrix ist eine ganze Zahl. Ferner beinhaltet das transponierte Wägeschema nur Komponenten aus ganzen Zahlen. Aus diesen Gründen sind die Komponenten der Lösungsmatrix, wenn sie mit der Determinanten der Normalmatrix multipliziert werden, auch ganze Zahlen. Umgekehrt gilt, dass die Nenner der Komponenten der Lösungsmatrix höchstens gleich der Determinante der Normalmatrix sind. Die Elemente jeder Zeile (oder Spalte) der Lösungsmatrix kann man durch Kürzen auf den kleinsten gemeinsamen Zeilen- (Spalten-) Nenner bringen. Offenbar ist es sinnvoll, nur die ersten n_w Elemente der Zeilenvektoren in Betracht zu ziehen, denn nur diese sind relevant bei der Multiplikation mit dem Wägewertvektor. Sei \mathbf{d} der Spaltenvektor dieser kleinsten gemeinsamen Zeilen-Nenner. Die Diagonalmatrix \mathbf{D} bestehe aus den Komponenten von \mathbf{d} als Diagonalelemente.¹ Ferner sei \mathbf{N} die aus den Zählern in den einzelnen Zeilen gebildete Matrix von $n_o + n_w$ Zeilen und n_w Spalten. Dann ist die auf diese Zeilen und Spalten reduzierte Lösungsmatrix

$$\mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}. \quad (5.4-48)$$

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit ist eine Darstellung der Lösungsmatrix in dieser Form recht praktisch.

¹ Diese Matrix ist nicht zu verwechseln mit der Driftmatrix.

5.4.10 Summierung der nach Vorzeichen selektierten Komponenten

Wenn man nun die Lösungsmatrix in nach Gleichung 5.4-48 reduzierter Dimension von rechts mit dem Vektor $\mathbf{d}(n_w)$ multipliziert, erhält man nach Gleichung 5.4-6 einen Vektor mit n_o Nullelementen und daran anschließend nach Gleichung 5.4-9 mit n_w Elementen vom Betrag 1:

$$\mathbf{S}(n_w \mid n_w + n_o) \mathbf{d}(n_w) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{d}(n_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4-49)$$

Die Multiplikation mit der Nenner-Diagonalmatrix ergibt

$$\mathbf{N} \mathbf{d}(n_w) = \mathbf{D} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4-50)$$

Denkt man sich die Matrixmultiplikation ausgeführt und beachtet die Darstellung in Abbildung 5.4-7, so stellt man für die Zähler-Matrix \mathbf{N} und die Nenner \mathbf{D} folgendes fest:

- Die Summe der positiven Komponenten der ersten n_o Zeilen ist jeweils stets gleich der Summe der negativen Komponenten. Die beiden Summen ergeben auch den Nenner.
- Die Summen der dem Bezugsnormal zugeordneten Komponenten der Zeilen von $n_o + 1$ bis n_w ergeben den jeweiligen Nenner. Die Summe der übrigen Komponenten dieser Zeilen ist 0.

5.4.11 Mehrfachprodukte mit der Lösungsmatrix

Das Produkt der Wägematrix mit der Lösungsmatrix hat die Eigenschaft, dass es sich bei Multiplikation mit seiner Transponierten selbst darstellt. Es gilt

$$\mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) = \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w). \quad (5.4-51)$$

Die Herleitung ergibt sich im Zusammenhang mit der Gleichung 6.1-21 (Fußnote). Wie unmittelbar zu erkennen ist, folgt hieraus eine entsprechende Eigenschaft für die Differenz der Einheitsmatrix \mathbf{I} und des Produktes $\mathbf{X} \mathbf{S}$:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) \mathbf{X}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w)) = \mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w). \quad (5.4-52)$$

Beide Ausdrücke $\mathbf{X} \mathbf{S}$ und $\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{S}$ sind positiv definit, weil sie sich nach 5.4-51 und 5.4-52 auf eine jeweils quadratische Form zurückführen lassen [37].

5.5 Beispiel zum Modell freier Driftänderungen

In diesem Abschnitt wird als Anwendungsbeispiel folgendes LDA-Modell behandelt:

- Freies lineares Driftmodell für zwei Objekte N und P
- Alternierende Belastungsfolge der Waage
- Durchgehender Beobachtungszeitraum
- 12 Wägungen als Beispiel

Die Herleitung der allgemeinen Lösungsgleichung erfolgt im Abschnitt 5.3. Die Rechnungen zur Bestimmung der Lösungsmatrix in diesem Beispiel können mit Hilfe von Excel nachvollzogen werden. Die Excel-Oberflächen sind im Anhang 9.2.1 wiedergegeben. Der Einfachheit halber sind im Folgenden Auftriebskorrekturen unberücksichtigt geblieben. Die Luftdichte wird also Null gesetzt. Alle zusätzlichen Komponenten, die sich durch die Anwendung des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren ergeben, werden in der Darstellung der Lösung nicht mehr benötigt. Nur die wesentlichen Komponenten betreffend der Masse- und der *Vorlastwerte* werden nachstehend gezeigt.

Wenn man für die Luftdichte $\rho_a = 0$ setzt, ergibt sich eine *Wägematrix* nach Abbildung 5.5-1.

x		j		i											
		1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Abb. 5.5-1: Erweiterte Wägematrix bei alternierender Belastung

Da die Driftgleichungen durchgängig anzuwenden sind, gilt für die *Driftmatrix* gemäß Abschnitt 3.3.1 der Ansatz nach Abbildung 5.5-2.

D		j		i											
		1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1

Abb. 5.5-2: Driftmatrix bei alternierender Belastung

Wären die *Driftänderungen* unfrei, würden die Vorlastwerte sich durchgehend linear verändern (siehe Abbildung 3.3-1). Jedoch lässt das LDA-Modell jetzt Abweichungen von der strengen Linearität beziehungsweise der Driftkonstanz zu.

Die für die Fälle einer Luftdichte gleich 0 oder idealisierter Massepunkte errechnete Zähler-Matrix ist in der Abbildung 5.5-3 dargestellt. Die zugehörigen Nenner findet man in der Spalte unter **d**. Die letzte Spalte zeigt die Werte 1 für die Zeilen $j = 1$ und 2. Dies sind jene Zeilen, aus denen die Massewerte resultieren. Die Zeilen, aus denen die Vorlastwerte errechnet werden, enthalten in der letzten Position die Werte -1 . Die Summe der positiven beziehungsweise negativen Komponenten der Zeile $j = 2$ ergibt den Nenner 136. Die Summe der Komponenten der ungeraden Spaltenpositionen der Zeilen i ergeben die Nenner 17000, 17000, 1700 usw. Damit bestätigen sich auch die in Abschnitt 5.4 und speziell 5.4.10 erarbeiteten Struktureigenschaften der Lösungsmatrix.

N	j	d	i												...	41
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
j	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1
	2	136	-12	27	-25	23	-25	24	-24	25	-23	25	-27	12	...	1
i	1	17000	13424	4119	1390	-1306	98	-1025	600	-727	694	-710	794	-351	...	-1
	2	17000	5619	5339	5565	89	1638	-1650	1225	-1587	1339	-1485	1614	-706	...	-1
	3	1700	139	244	835	279	308	-125	125	-172	129	-155	164	-71	...	-1
	4	17000	194	-411	5915	5139	5813	-150	1850	-1937	1389	-1835	1839	-806	...	-1
	5	17000	98	-1487	3080	2688	8146	2575	2950	-1329	1188	-1720	1538	-727	...	-1
	6	680	19	-81	75	-1	228	200	225	-7	69	-75	64	-36	...	-1
	7	680	24	-71	50	-46	118	105	320	103	114	-50	54	-41	...	-1
	8	17000	773	-1837	1405	-1687	1796	-50	5575	5021	5563	-45	1888	-1402	...	-1
	9	8500	347	-768	645	-743	594	-575	1425	1344	4007	1395	1482	-653	...	-1
	10	3400	158	-347	315	-317	281	-350	350	-9	1133	1045	1163	-22	...	-1
	11	17000	794	-1761	1640	-1536	1538	-1775	1350	-1487	2964	2440	8714	4119	...	-1
	12	17000	1149	-2581	2415	-2181	2398	-2400	1975	-3027	1569	-1735	7494	11924	...	-1

Abb. 5.5-3: Wiedergabe der mit Excel berechneten Zählermatrix

Die Beispiele der in Abschnitt 5.2-4 dargestellten Verläufe der Vorlastwerte in Abhängigkeit vom Driftmodell werden unter Verwendung gleicher Daten hier noch einmal aufgegriffen. Es gilt nach wie vor der Idealfall gleicher Massewerte und einer Luftdichte 0:

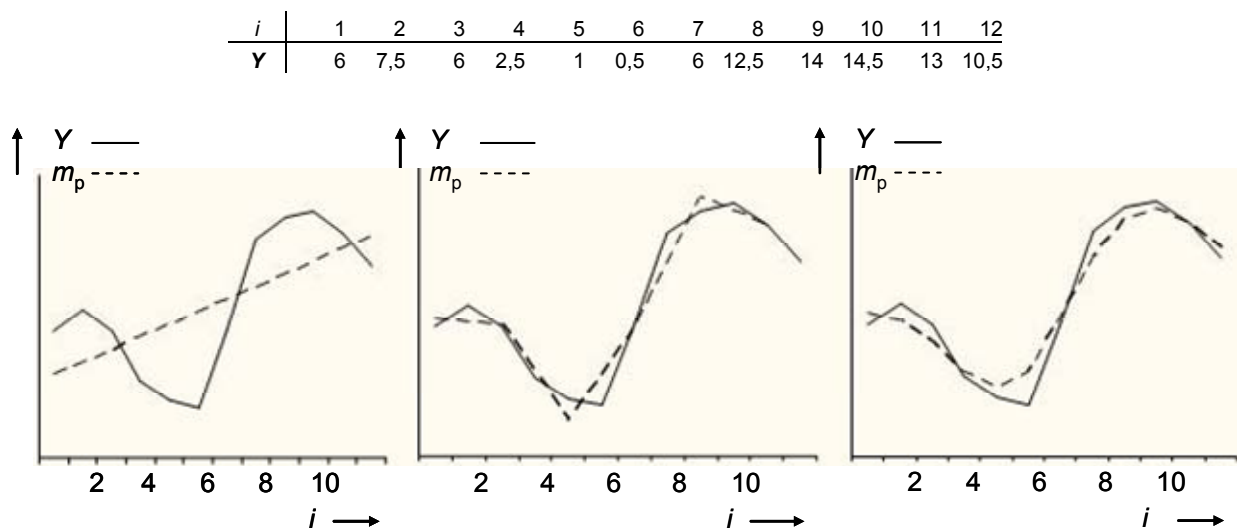


Abb. 5.5-4 Anpassungsfähigkeit verschiedener Driftmodelle

Das erste Diagramm stellt zum Vergleich noch einmal den Fall des durchgehend linearen Driftmodells dar. Das zweite Diagramm entspricht dem partiell konstanten Driftverlauf im Falle der *Einfachsubstitution*. Das rechte Diagramm zeigt das Ergebnis, wie es sich nach der Anwendung des LDA-Modells ergibt.

Die Vorteile des LDA-Modells sind offensichtlich:

- Der Verlauf der Vorlastwerte ist am besten angepasst, aber geglättet.
- Größere „Sprünge“ der *Wägewerte* werden also nicht voll angenommen, sie werden daher, wie es sein sollte, eher zur Standardabweichung beitragen.
- Die bessere Glättung bedeutet eine bessere zeitlich fortschreitende Mittelung über stets nur kurze Zeitspannen.
- Diese Verlaufsmittelung kann aber über beliebig ausgedehnte Zeiträume erfolgen. Unabhängig von den Stichprobenumfängen ist es also stets möglich, die Drift der Vorlastwerte zu erfassen und darzustellen.

5.6 Approximationen

In diesem Abschnitt werden Approximationen der Lösungsformeln behandelt, die dann möglich sind, wenn sich die Luftdichte während einer *Messreihe* nicht oder wenig verändert. Diese Approximationen haben den Vorteil, dass die *Wägematrix* auf den Fall der Luftdichte Null reduziert werden kann. Damit treten in der Lösungsmatrix keine Auftriebsterme auf, so dass unabhängig von der Messreihe stets mit der gleichen Lösungsmatrix beziehungsweise mit den gleichen Lösungskoeffizienten gearbeitet werden kann. Dies bietet sich für die Anwendung der hier entwickelten Methoden im Standardbetrieb von Kalibrierlaboratorien an.

5.6.1 Konstante Luftdichte

Die Lösung der Gleichungssysteme nach den Abschnitten 5.1 und 5.3 kann vereinfacht werden, wenn man näherungsweise davon ausgeht, dass sich die Luftdichte wenig ändert. In diesem Abschnitt wird im ersten Schritt angenommen, dass die Luftdichte konstant ist. Auch wenn das der Fall sein sollte, bedeutet dies aber nicht, dass die *Driftänderungen* der Waage grundsätzlich vernachlässigbar sind, zumal diese nicht allein von den Änderungen der Luftdichte abhängen. Es sind also nach wie die in den Abschnitten 5.1 und 5.3 dargestellten Prinzipien und Lösungswege notwendig.

Unter der Voraussetzung einer konstanten oder im Rahmen einer Approximation mittleren Luftdichte gilt für die Matrix der Luftdichte der vereinfachte Fall

$$\mathbf{P}_a = \overline{\rho_a} \mathbf{I}. \quad (5.6-1)$$

Dann vereinfacht sich die in der Gleichung 2.2-7 definierte *Wägematrix* beträchtlich:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 - \overline{\rho_a} \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_0}^T. \quad (5.6-2)$$

Hierbei ist \mathbf{X}_0 diejenige Wägematrix, die in den Fällen einer Luftdichte gleich Null oder idealisierter Massepunkte vorliegen würde. Die erweiterte Einheitsmatrix in 5.6-2 rechts sorgt dafür, dass der zweite Term durch eine passende Nullmatrix erweitert ist (siehe die Abbildung 6.1-1 und die zugehörige Beschreibung in Abschnitt 6.1).

Anstelle des erweiterten *Massevektors* wird nun der erweiterte *Lastvektor* \mathbf{M}_a für konstante Luftdichte definiert. Er entsteht durch Hinzufügen eines Auftriebsterms gemäß

$$\mathbf{M}_a = (\mathbf{I} - \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_0} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_0}^T) \mathbf{M}. \quad (5.6-3)$$

Nach dieser Definition stellt sich die Frage, wie sich die *Wägeggleichung* 2.2-9 jetzt darstellt. Dazu multipliziert man 5.6-3 von links mit der Wägematrix \mathbf{X}_0 . Es ergibt sich

$$\mathbf{X}_0 \mathbf{M}_a = \mathbf{X} \mathbf{M} \quad (5.6-4a)$$

$$= \mathbf{Y} - \langle \mathbf{e} \rangle. \quad (5.6-4b)$$

Dies bedeutet, dass die Wägeggleichungen auf den Vakuumfall beziehungsweise den idealisierten Fall von Massepunkten zurückgeführt werden können. Die zu bestimmende Größe ist aber jetzt der Lastvektor \mathbf{M}_a . Durch Auflösung von Gleichung 5.6-3 nach \mathbf{M} würde sich dann der Massevektor ergeben. Es müssen aber auch die Nebenbedingungen festgelegt werden. Dazu multipliziert man 5.6-3 von links mit der *Driftmatrix* \mathbf{D} (siehe die Gleichung 3.2-9). Bei der Multiplikation mit der erweiterten Einheitsmatrix erhält man unmittelbar eine Nullmatrix. Der zweite Term in 5.6-3 entfällt also. Somit ist

$$\mathbf{D} \mathbf{M}_a = \mathbf{D} \mathbf{M} \quad (5.6-5a)$$

$$= \mathbf{E}, \quad (5.6-5b)$$

es gilt also unverändert die bekannte Nebenbedingung *Drift* (siehe die Gleichung 3.2-10). Wenn man die erste Komponente des Lastvektors nach Gleichung 5.6-3 mit der ersten Komponente des Massevektors vergleicht, ergibt sich

$$m_{aR} = \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_R}\right) m_R. \quad (5.6-6)$$

Die Nebenbedingung Masse wird also ersetzt durch eine „Nebenbedingung *Last*“. Sie lautet entsprechend der Gleichung 2.2-10

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{M}_a = m_{aR}. \quad (5.6-7)$$

Das bedeutet, dass der Massewert der Bezugsmasse zunächst um den Auftrieb korrigiert werden muss, bevor er in die Bestimmungsgleichung für die Massen der zu kalibrierenden Objekte eingesetzt wird.

Die Gleichungen 5.6-4, 5.6-5 und 5.6-7 stellen ein Gleichungssystem dar, welches dem idealisierten Fall von Massepunkten beziehungsweise dem Vakuumfall genau entspricht. Die Lösungsmatrix dieser Wägleichung ist nach den Gleichungen 5.1-15 oder 5.3-19

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0)_e^{-1} (\mathbf{X}_0^T)_e. \quad (5.6-8)$$

Vorteilhaft ist offenbar, dass jetzt die Lösung keine Auftriebsterme mehr enthält, weil sie nur noch aus der Wägematrix \mathbf{X}_0 besteht. Wenn man jetzt die Lösungsmatrix auf die wesentlichen Komponenten reduziert, also auf die ersten $n_o + n_w$ Zeilen und n_w Spalten, beziehungsweise auf die letzte Spalte j_{\max} , so ist

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{Y} + \mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid j_{\max}) m_{aR}. \quad (5.6-9)$$

die Lösung für den Lastvektor. Nach Abbildung 5.4-4 sind die Elemente der letzten Spalte gleich 1 für die ersten n_o Zeilen und -1 für die nachfolgenden Zeilen.

Da nicht der Lastvektor \mathbf{M}_a , sondern der Massevektor \mathbf{M} von Interesse ist, muss die Lösung noch auf die Masse umgerechnet werden:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o}^T)^{-1} \mathbf{M}_a \quad (5.6-10)$$

Da die Luftdichte im Vergleich zu den Materialdichten klein ist, existiert auf jeden Fall die Matrixinverse. Da es sich bei dem geklammerten Ausdruck um eine Diagonalmatrix handelt, kann die Matrixinverse direkt berechnet werden. Sie ist

$$(\mathbf{I} - \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_j}\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \dots \quad j = 1, 2, \dots, n_o \quad (5.6-11)$$

Die Elemente mit ρ_j auf der rechten Seite sind die Diagonalelemente einer Diagonalmatrix. Nach den Gleichungen 5.6-6, 5.6-9 und 5.6-10 ergibt sich

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o}^T)^{-1} \left(\mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{Y} + \mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid j_{\max}) \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_R}\right) m_R \right). \quad (5.6-12)$$

Ein Beispiel zu dieser Lösungsformel zusammen mit Abschnitt 5.6.2, in dem der Fall sich gering ändernder Luftdichten behandelt wird, ist in Abschnitt 5.6.3 ausgeführt.

5.6.2 Auftriebskorrektur an den Wägewerten

Es werden nun geringe Abweichungen der Luftdichte von ihrem Mittelwert zugelassen. Die Abweichungen seien genügend klein, so dass es ausreicht, wenn man ihren Anteil am Gesamtauftrieb näherungsweise mit Hilfe vorgegebener Massewerte berechnet. Es bietet sich zum Beispiel an, die Massewerte aus der letzten Kalibrierung (l_c) zu verwenden. Diese Massewerte bilden den Massevektor \mathbf{m}_{lc} . Anhand der bekannten Dichtewerte, von denen man annehmen kann, dass sie konstant sind, liegen damit die Bezugsvolumina in Form eines Vektors \mathbf{v}_{lc} vor, der jedem Objekt ein Volumen zuordnet. Zur Durchführung dieses Vorhabens wird die Gleichung 2.2-6 so umgeschrieben, dass die Luftdichteabweichungen vom Mittelwert erscheinen:

$$(\mathbf{X}_w - \overline{\rho_a} \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m} + \mathbf{m}_p = \mathbf{Y} + (\mathbf{P}_a - \overline{\rho_a}) \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{m} - \langle \mathbf{e} \rangle. \quad (5.6-13)$$

Entsprechend den Voraussetzungen geringer Änderungen der Luftdichte werden im Auftriebsterm auf der rechten Seite die unbekannten Massen durch die vorgegebenen Massewerte, zum Beispiel die der letzten Kalibrierung, ersetzt. Die Approximation lautet also

$$(\mathbf{X}_w - \overline{\rho_a} \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{m} + \mathbf{m}_p = \mathbf{Y}_a - \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (5.6-14)$$

wobei die Wägewerte durch einen bekannten Auftriebsterm ergänzt werden. Es gibt also jetzt einen korrigierten Wägewert

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y} + (\mathbf{P}_a - \overline{\rho_a}) \mathbf{X}_w \mathbf{v}_{lc}, \quad (5.6-15)$$

bei dem Veränderungen der Luftdichte und damit Veränderungen am Auftrieb der Objekte direkt berücksichtigt sind.

Die Gleichung 5.6-14 entspricht den Gleichungen 5.6-3 und 5.6-4. Der Wägewert ist jetzt durch den korrigierten Wägewert ersetzt. Die Lösung kann von 5.6-12 übernommen werden. Sie ist

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{S}_0(n_o + n_w \mid n_w) (\mathbf{Y} + (\mathbf{P}_a - \overline{\rho_a}) \mathbf{X}_w \mathbf{v}_{lc}) + \mathbf{S}_0(n_o + n_w \mid j_{\max}) \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_R} \right) m_R \right). \quad (5.6-16)$$

5.6.3 Beispiel: 2 Objekte

Für das erste Objekt, das Arbeitsnormal der bekannten Masse m_R , folgt aus der Gleichung 5.6-16 erwartungsgemäß

$$m_N = m_R. \quad (5.6-17)$$

Dies ergibt sich aus der ersten Zeile der Lösungsmatrix, die aus Elementen 0 und an der letzten Stelle einer 1 besteht (siehe Abschnitt 5.4.1). Für das zweite zu kalibrierende Objekt erhält man

$$m_P = \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_P} \right)^{-1} \left(\mathbf{S}_0(2 \mid n_w) (\mathbf{Y} + (\mathbf{P}_a - \overline{\rho_a}) \mathbf{X}_w \mathbf{v}_{lc}) + \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_N} \right) m_R \right). \quad (5.6-18)$$

Zur Anwendung dieser *Kalibrierformel* benötigt man also die simultan mit den Wägungen aufgenommenen Luftdichtewerte und deren Mittelwert, sowie die Abweichungen vom Mittelwert. Ferner müssen die Volumina bekannt sein, die bei der Korrektur des Wägewertes eingesetzt werden sollen. Mit Hilfe der *Schemamatrix* \mathbf{X}_w kann man dann die erfassten Wägewerte korrigieren. Die Lösungsmatrix bestimmt man nach den in zum Beispiel Abschnitt 5.2 vorgelegten Lösungsformeln.

Falls Bedarf besteht, kann man auch die Vorlastwerte bestimmen. Sie ergeben sich aus den Zeilen $n_o + 1$ bis $n_o + n_w$ des Gleichungssystems 5.6-16. Die letzte Spalte der Lösungsmatrix geht hier mit den Werten -1 ein (siehe Abschnitt 5.4.1). Dann erhält man

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{S}_0(n_o < i \leq n_o + n_w \mid n_w) \left(\mathbf{Y} + (\mathbf{P}_a - \overline{\rho_a}) \mathbf{X}_w \mathbf{v}_{lc} \right) - \left(1 - \frac{\overline{\rho_a}}{\rho_R} \right) \mathbf{m}_R. \quad (5.6-19)$$

6 Unsicherheitsberechnungen

6.1 Typ A - Unsicherheiten der Lösungen der Wägegleichungen

In Kapitel 5 wurden *Kalibrierformeln* zur Massebestimmung hergeleitet. Aufgrund der Tatsache, dass auch die *Vorlastwerte* berücksichtigt wurden, die das Verhalten der Waage charakterisieren, umfassen die Kalibrierformeln nicht nur die Objektmassen, sondern auch die Vorlastwerte. In diesem Abschnitt soll nun erarbeitet werden, wie sich die Messunsicherheiten auf der Grundlage dieser Kalibrierformeln bestimmen lassen. Es handelt sich also um die Bestimmung der Messunsicherheiten der Massen und der Vorlastwerte. Dazu wird unterschieden werden zwischen

- Unsicherheiten, die auf die zufälligen Schwankungen der *Wägewerte* zurückzuführen sind. Der gebräuchlichen Terminologie folgend sind dies die *Typ A - Unsicherheiten*.
- Unsicherheiten, die auf systematische Abweichungen zwischen den Messwerten der Einflussparameter von ihren tatsächlichen Werten zurückzuführen sind. Entsprechend der Terminologie sind dies die *Typ B – Unsicherheiten* [8].

Die zufälligen Schwankungen der *Wägewerte* werden durch die Wägewertabweichungen dargestellt. Zur Bestimmung der Typ A – Unsicherheiten der aus den Messwerten resultierenden Masse- und Vorlastwerte muss daher untersucht werden, wie sich die Wägewertabweichungen auf den *erweiterten Massevektor* auswirken (siehe die Gleichung 2.2-8). Für die Wägewertabweichungen sind die Residuen von Interesse. Sie ergeben sich aus dem Unterschied zwischen den gemessenen und den Wägewerten nach erfolgter Ausgleichsrechnung. Der Vektor $\langle \mathbf{Y} \rangle$ der ausgeglichenen Wägewerte und der erweiterte Massevektor \mathbf{M} sind durch die *Wägegleichung*

$$\mathbf{XM} = \langle \mathbf{Y} \rangle. \quad (6.1-1)$$

verbunden (siehe zum Beispiel die Gleichung 2.2-9). Der Vektor der Residuen ist

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{Y} - \langle \mathbf{Y} \rangle. \quad (6.1-2)$$

In Übereinstimmung mit der Gleichung 2.2-9 gilt für die Residuen also die Gleichung

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{Y} - \mathbf{XM}. \quad (6.1-3)$$

Die Summe der Quadrate der Residuen eröffnet die Möglichkeit für eine Berechnung der Wiederholbarkeit der *Wägungen*. Dazu wird zunächst die Kovarianzmatrix gebildet. Sie beinhaltet die *Varianzen* und *Kovarianzen* der Wägewertabweichungen. Die Varianzen und Kovarianzen der Wägewertabweichungen seien durch

$$\mathbf{C}_A = \langle \mathbf{ee}^T \rangle. \quad (6.1-4)$$

gegeben. Da vorausgesetzt wurde, dass die Wägewertabweichungen voneinander statistisch unabhängig sind, werden die Elemente außerhalb der Diagonalen der Kovarianzmatrix 0 gesetzt. Ferner müssen die Diagonalelemente alle vom gleichen Betrag sein, weil kein Element nach Voraussetzung statistisch bevorzugt ist. Das liefert einen einzigen Wert für die Varianz. Sie wird geschätzt durch die Wiederholbarkeit - Varianz mit folgenden Berechnungsmöglichkeiten:

$$s^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{n_w} \langle \mathbf{e}_i \rangle^T \langle \mathbf{e}_i \rangle \quad (6.1-5a)$$

$$= \frac{1}{f} (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{M}^T \mathbf{X}^T \mathbf{XM}) \quad (6.1-5b)$$

$$= \frac{1}{f} (\mathbf{Y} - \mathbf{XM})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XM}) \quad (6.1-5c)$$

$$= \frac{1}{f} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) \mathbf{X}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{XS}(n_o + n_w \mid n_w)) \mathbf{Y} \quad (6.1-5d)$$

$$= \frac{1}{f} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{XS}(n_o + n_w | n_w)) \mathbf{Y}. \quad (6.1-5e)$$

Der statistische *Freiheitsgrad* ist f . Er wird später festgelegt (siehe Abschnitt 6.2). In die Umrechnungen unter Verwendung der Lösungsmatrix \mathbf{S} geht Gleichung 5.4-52 ein. Die Gleichungen in 6.1-5 für die Wiederholbarkeit - Varianz ersetzen die Berechnung durch

$$\frac{1}{n_d - 1} \sum_{i=1}^{n_d} (\Delta Y_i - \overline{\Delta Y})^2,$$

also durch die herkömmlich übliche aus Zyklusdifferenzen gebildete empirische Varianz [1], [2], [29], [30], [33]. Entsprechend wird die Kovarianzmatrix der Wägewerte mit Hilfe der Wiederholbarkeit - Varianz jetzt durch

$$\mathbf{C}_A = s^2 \mathbf{I} \quad (6.1-5)$$

angegeben.

Die Auswirkung der Wägewertabweichungen auf die Masse- und Vorlastwerte lässt sich anhand des Zusammenhangs zwischen dem erweiterten Massevektor und dem *Wägewertvektor* darstellen. Im Rahmen dieser Problemstellung kann man von dem Idealfall ausgehen, dass keine Messabweichungen vorkommen, denn die Zusammenhänge ergeben sich aus den Beziehungen zwischen den Erwartungswerten. Es geht zunächst um die Fragestellung, wie sich eine kleine Änderung $d\mathbf{y}$ des Wägewertvektors \mathbf{y} auf den erweiterten Massevektor \mathbf{M} auswirkt. Dabei ist zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden, dass es eine feste *Driftbeziehung* gibt oder dass die Drift nach dem *LDA-Verfahren* an den Verlauf der Vorlastwerte angepasst ist (siehe die Abschnitte 5.1 und 5.3).

a) Feste Driftbeziehung

Es handelt sich um die in Abschnitt 5.1 erarbeiteten Kalibrierformeln unter der Bedingung *unfreier Driftänderungen*. Für die Erwartungswerte gilt das Gleichungssystem

$$\text{Wägleichung:} \quad \mathbf{XM} = \mathbf{y} \quad (6.1-6a)$$

$$\text{Nebenbedingung Bezugsmasse:} \quad \mathbf{x}_1 \mathbf{M} = m_R \quad (6.1-6b)$$

$$\text{Nebenbedingung Drift:} \quad \mathbf{DM} = \mathbf{E} \quad (6.1-6c)$$

Es entspricht der Gleichung 5.1-4, wobei die Wägewertabweichungen entfallen, da hier nur die Erwartungswerte benötigt werden. Der *Driftänderungsvektor* \mathbf{E} kann vorerst als von 0 verschieden angenommen werden, um den allgemeinen Fall mit zu berücksichtigen. Dieses Gleichungssystem muss nach dem erweiterten Massevektor \mathbf{M} aufgelöst werden.

Dazu wird gezeigt, dass das Gleichungssystem ähnlich der Realisierung der geringsten Summe der Quadrate der Wägewertabweichungen auf ein Extremalprinzip zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zwecke definiert man die Funktion

$$F(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}). \quad (6.1-7)$$

Diese Funktion ist dann und nur dann 0 und ein Minimum, wenn ihre Variablen die Wägleichung erfüllen. Es sind aber nur solche Änderungen der Variablen zugelassen, bei denen auch die oben angegebenen Nebenbedingungen erfüllt sind. Diese mathematische Problemstellung entspricht derjenigen in Abschnitt 5.1, wobei anstelle der geringsten Summe der Quadrate der Abweichungen die Funktion F eingesetzt ist, für die jetzt ein Minimum gefordert wird (siehe Gleichung 5.1-6).

b) LDA-Prinzip

Im Falle der *freien Driftänderungen* gelten die in Abschnitt 5.3 erarbeiteten Kalibrierformeln. Für die Erwartungswerte lautet das Gleichungssystem entsprechend der Gleichung 5.3-15 wie folgt:

Wägleichung:	$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{y}$	(6.1-8a)
Nebenbedingung Bezugsmasse:	$\mathbf{x}_1\mathbf{M} = m_R$	(6.1-8b)
Definition der Driftänderungen:	$\mathbf{D}\mathbf{M} = \mathbf{E}$	(6.1-8c)
LDA-Prinzip	$\mathbf{E}^T\mathbf{E} \rightarrow \min$	(6.1-8d)

Zur Lösung dieses Gleichungssystems greift man wieder auf ein Extremalprinzip zurück. Dazu wird eine Funktion G eingeführt in der Form

$$G(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} . \quad (6.1-9)$$

Die Funktion G ist genau dann ein Minimum, wenn ihre Variablen die Wägleichung erfüllen und wenn das Betragsquadrat von $\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}$ am geringsten ist. Es sollen wieder nur solche Änderungen der Variablen zugelassen sein, die auch die Nebenbedingungen erfüllen. Als weitere Nebenbedingung muss gefordert werden, dass die erweiterten Massevektoren, welche den Wägleichungen genügen, dieselben sind, die das LDA – Prinzip erfüllen, also muss $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \equiv 0$ sein.

Die mathematische Problemstellung ist ähnlich dem Prinzip der geringsten Summe der Abweichungsquadrate in Verbindung mit dem LDA – Prinzip, wobei in der Lagrange-Funktion die Summe der Quadrate durch die Funktion G zu ersetzen ist (siehe Gleichung 5.3-15).

Nach diesen Überlegungen können jetzt in beiden Fällen (a) und (b) die Lösungen zusammengestellt werden. Die bereits erarbeiteten Ergebnisse in Abschnitt 5.1 (Gleichungen 5.1-16 bis 5.1-18) beziehungsweise in Abschnitt 5.3 (Gleichungen 5.3-29 bis 5.3-31) können unmittelbar übernommen werden. Da es bei Unsicherheitsberechnungen mathematisch um den Zusammenhang von Abweichungen geht, verwendet man die Lösungen in differentieller Form. Anstelle der Benutzung von Differentialen werden im Falle von Unsicherheitsberechnungen Differentialformen benutzt. In beiden Fällen wird aber das gleiche Symbol d verwendet.

Zunächst werden die Differentialformen aufgestellt, von denen aus die Kovarianzen des Massevektors herzuleiten sind. Dazu gehört einerseits die lineare Differentialform des expandierten Massevektors nach den Gleichungen 5.1-17 und 5.1-18 oder nach der Gleichung 5.3-30, die mit der Differentialform des expandierten Wägewertvektors zusammenhängt:

$$d\mathbf{M}_e = \mathbf{S}d\mathbf{y}_e . \quad (6.1-10)$$

Dazu gehört andererseits die lineare Differentialform des nicht expandierten Massevektors, die durch die Wägleichung gegeben ist:

$$\mathbf{X}d\mathbf{M} = d\mathbf{y} . \quad (6.1-11)$$

Zur Darstellung der Kovarianzen wird die quadratische Differentialform $(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T$ berechnet. Dabei müssen die Nebenbedingungen nach den Gleichungen 6.1-6 beziehungsweise 6.1-8 mit einfließen. Dies wird sichergestellt, wenn man auf Gleichung 6.1-10 zurückgreift. Auf diese Weise wird der Inhalt der Lösungsmatrix \mathbf{S} in die gesuchte quadratische Differentialform mit eingehen. Ferner wird die quadratische Differentialform $(d\mathbf{y})d\mathbf{y}^T$ der Wägewerte eingesetzt. Sie kann wesentlich vereinfacht werden: Da die Abweichungen der Komponenten des Wägewertvektors von den Erwartungswerten laut Voraussetzung voneinander statistisch unabhängig sind, gilt nämlich

$$(dy_i)dy_k^T = (dy)^2 \delta_k^i . \quad (6.1-12)$$

Deshalb ist die quadratische Differentialform $(d\mathbf{y})d\mathbf{y}^T$ eine Diagonalmatrix mit gleich großen Elementen:

$$(d\mathbf{y})d\mathbf{y}^T = (dy)^2 \mathbf{I} . \quad (6.1-13)$$

Es muss nun erarbeitet werden, wie die quadratische Differentialform des Massevektors mit der quadratischen Differentialform des Wägewertvektors zusammenhängt. Zweckmäßigerweise geht man von dem Ausdruck $(d\mathbf{M}_e)d\mathbf{M}^T\mathbf{X}^T$ aus, denn bei ihm können die oben erwähnten Voraussetzungen einfließen. Nach den Gleichungen 6.1-11 und 6.1-12 besteht folgende lineare Beziehung zwischen den quadratischen Formen des erweiterten Massevektors und des Wägewertvektors:

$$(d\mathbf{M}_e)d\mathbf{M}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{S}(d\mathbf{y}_e)d\mathbf{y}^T. \quad (6.1-14)$$

Diese lineare Beziehung soll nach der quadratischen Differentialform des erweiterten Massevektors aufgelöst werden. Dazu werden zunächst noch gewisse Darstellungsweisen eingeführt.

Bei der Verarbeitung von Vektoren und Matrizen, die aufgrund der Anwendung des Verfahrens der Lagrange – Multiplikatoren expandiert wurden, sind als Ergebnis wiederum nur Teilvektoren oder Teilmatrizen von Interesse. Deshalb benötigt man eine übersichtliche Methode der Reduktion von Matrix- und Vektordimensionen. Besonders bei der Entwicklung von Formeln im Zusammenhang mit Unsicherheitsberechnungen tritt dieses Problem häufig auf. Zur besseren Handhabung von Matrixreduktionen, werden zunächst auf gewisse Weise erweiterte Einheitsmatrizen definiert. Mit diesen Einheitsmatrizen sollen nicht benötigte Teilmatrizen zu Nullmatrizen umgewandelt werden. Durch Multiplikation einer Matrix mit einer so erweiterten Einheitsmatrix sollen also nur wesentliche Teilmatrizen selektiert werden, während überflüssige Teilmatrizen zu Null werden. Bei der Durchführung von Matrixmultiplikationen sind manchmal auch Erweiterungen durch Nullelemente notwendig.

Sei nun $\mathbf{I}_n(i_0 | j_0)$ eine um Nullelemente erweiterte Einheitsmatrix. Die eigentliche Einheitsmatrix \mathbf{I}_n der Dimension n beginne bei den Koordinaten $i = i_0, j = j_0$. Die Zahl der nachfolgenden Nullzeilen und Nullspalten braucht nicht näher festgelegt zu werden. Sie richtet sich nach den anderen, in der aktuellen Gleichung vorkommenden Matrizen (Abbildung 5.4-6). Wenn die Koordinaten $i_0 = 1$ und $j_0 = 1$ betragen, wird der Einfachheit halber das Argument $(i_0 | j_0)$ weggelassen.

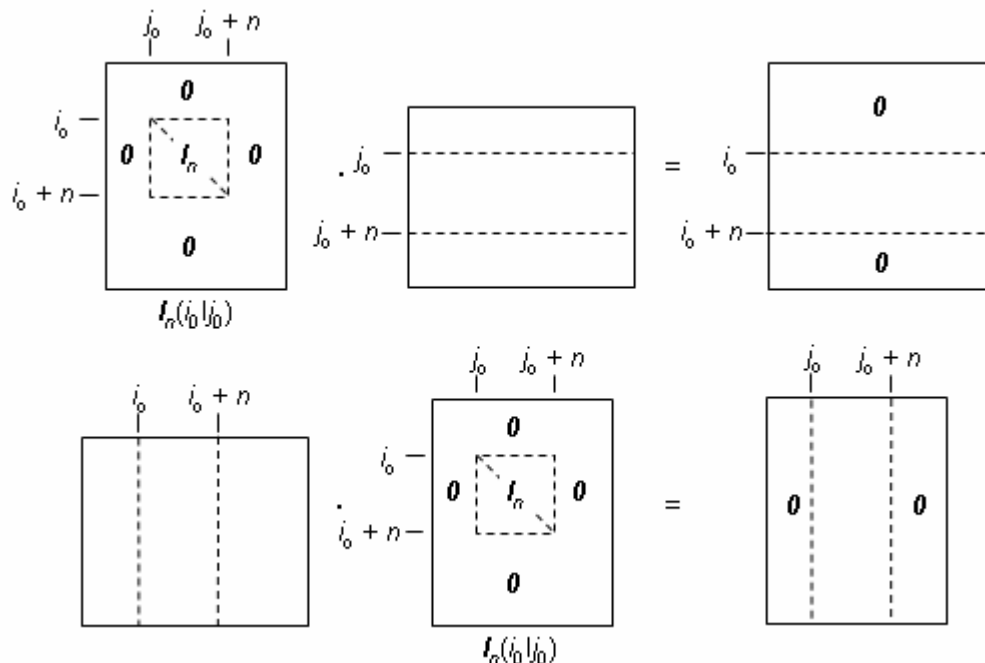


Abb. 6.1-1: Die erweiterte Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n(i_0 | j_0)$ und ihre Wirkungsweise

Als erste Anwendung soll eine erweiterte Einheitsmatrix bei der Differentialform des Wägewertvektors zum Einsatz kommen. Da nur die ersten n_w Elemente variabel sind, gilt für die expandierte Differentialform des Wägewertvektors die Gleichung

$$d\mathbf{y}_e = \mathbf{I}_{n_w} d\mathbf{y}. \quad (6.1-15)$$

In der Gleichung 6.1-14 sind die Zeilen der Kovarianzen, die mit der Expansion des Massevektors zusammenhängen, nicht von praktischem Interesse. Deshalb sollen diese Zeilen durch Multiplikation

mit einer erweiterten Einheitsmatrix abgeschnitten werden. Die Multiplikation erfolgt von links und ergibt:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{I}_{n_o+n_w} d\mathbf{M}_e . \quad (6.1-16)$$

Die Gleichungen 6.1-14 bis 6.1-16 zusammen mit der Gleichung 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31 ergeben

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \mathbf{X}^T = (dy)^2 \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{I}_{n_w} . \quad (6.1-17)$$

Die transponierte expandierte *Wägematrix* $(\mathbf{X}^T)_e$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung soll jetzt nach rechts außen geschoben werden. Dies erreicht man unter Verwendung ebenfalls von erweiterten Einheitsmatrizen mit Hilfe der folgenden Umstellung

$$(\mathbf{X}^T)_e \mathbf{I}_{n_w} \rightarrow \mathbf{I}_{n_o+n_w} \mathbf{X}^T . \quad (6.1-18)$$

Zur Überprüfung dieser Umstellung beachte man die Struktur der Wägematrix nach Gleichung 5.1-12 beziehungsweise 5.3-23. Nun kann also die transponierte Wägematrix nach rechts außen geschoben werden. Somit darf die Gleichung 6.1-18 wie folgt umgeschrieben werden:

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \mathbf{X}^T = (dy)^2 \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \mathbf{X}^T . \quad (6.1-19)$$

Damit wurde erreicht, dass beidseitig der Multiplikator \mathbf{X}^T steht. Die Gleichung 6.1-20 wird erfüllt, wenn man die quadratische Differentialform des erweiterten Massevektors zu

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T = (dy)^2 \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \quad (6.1-20)$$

angibt¹.

Die oben hergeleitete Differentialform stellt den Zusammenhang her zwischen der Varianz der Wägewerte und den Varianzen und Kovarianzen der Komponenten des erweiterten Massevektors. Wenn man nun die differentiellen Elemente als kleine Abweichungen auffasst, so lassen sich die folgenden Analogien herstellen:

$$\text{Varianz der Wägewerte (Typ A): } s^2 \leftrightarrow (dy)^2 \quad (6.1-21)$$

$$\text{Kovarianz der Massekomponenten: } \mathbf{V}_{MA} \leftrightarrow (d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \quad (6.1-22)$$

Die Typ A – Bestimmungsgleichung für die Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors folgt somit unmittelbar aus Gleichung 6.1-21 zu

$$\mathbf{V}_{MA} = s^2 \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} . \quad (6.1-23)$$

¹ Andererseits ist nach 5.1-18 beziehungsweise 5.3-31

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T = (dy)^2 \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) = (dy)^2 \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{I}_{n_w} \mathbf{X}_e (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} .$$

Unter Verwendung der Gleichungen 6.1-17 und 6.1-19 und Vergleich mit 6.1-21 erhält man

$$\mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} = \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} .$$

Multiplikation von links mit \mathbf{X} und von rechts mit \mathbf{X}^T und erneute Anwendung von 6.1-19 liefert

$$\mathbf{I}_{n_w} \mathbf{X}_e (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{I}_{n_o+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{I}_{n_w} = \mathbf{X} \mathbf{I}_{n_w+n_w} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \mathbf{I}_{n_w} .$$

Im Rahmen der Darstellung von Teilmatrizen der Lösungsmatrix ergibt sich

$$\mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) = \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) .$$

Eine Multiplikation des Produktes $\mathbf{X} \mathbf{S}$ mit seiner Transponierten liefert also wieder $\mathbf{X} \mathbf{S}$.

Die Gleichung 6.1-24 gilt allgemein unter Berücksichtigung der in dem Wägeschema enthaltenen Auftriebskorrekturen. Näherungsweise kann man jedoch davon ausgehen, dass bei einer Schätzung der Varianzen und Kovarianzen Änderungen der Luftdichte vernachlässigt werden können, vor allem dann, wenn die Gewichtsmaterialien von etwa gleicher Dichte sind. In diesem Falle greift man auf Gleichung 2.2-7 zurück, um alle Elemente der Luftdichtematrix \mathbf{P}_a durch die mittlere Luftdichte $\bar{\rho}_a$ und alle Elemente der Materialdichtematrix \mathbf{P} durch die mittlere Materialdichte $\bar{\rho}$ anzunähern. Dann ist die Wägematrix

$$\mathbf{X} = \left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\bar{\rho}}\right) \mathbf{X}_0. \quad (6.1-24)$$

Die Wägematrix \mathbf{X}_0 ist diejenige, die bei verschwindenden Luftdichten vorläge. Sie besteht also aus der *Schemamatrix* ergänzt um eine Einheitsmatrix (siehe Abschnitt 2.2). Sie enthält daher nur Elemente 1 oder 0. Mit dieser Approximation erhält man für die Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors

$$\mathbf{V}_{MA} = \frac{s^2}{\left(1 - \frac{\bar{\rho}_a}{\bar{\rho}}\right)^2} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \left(\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0\right)_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o+n_w} \quad (6.1-25)$$

Die Matricelemente ergeben sich durch Multiplikation der invertierten expandierten Normalmatrix ohne Berücksichtigung der Auftriebsterme mit einem skalaren Faktor, der im Wesentlichen die Wiederholbarkeit – Varianz s^2 darstellt. Diese Varianz erscheint mit einem Auftriebsterm, der im Nenner eine gering ins Gewicht fallende Auftriebskorrektur zulässt.

6.2 Bestimmung des statistische Freiheitsgrades

Zur Ermittlung des statistischen *Freiheitsgrades* bei der Massebestimmung nach den in dieser Arbeit behandelten Methoden der *unfreien Driftänderungen* nach Abschnitt 5.1 und der *freien Driftänderungen* nach Abschnitt 5.3 soll zunächst die Methodik erarbeitet werden, nach der statistische Freiheitsgrade zu bestimmen sind. Dadurch soll das hier durchgeführte Verfahren der Freiheitsgradbestimmung verständlich gemacht werden. Zu diesem Zwecke sei zu Beginn die Definition des statistischen Freiheitsgrades wie folgt zusammengefasst [8], [11], [13], [15], [16]:

Der statistische Freiheitsgrad ergibt sich aus der Anzahl der Messungen, also der Anzahl der Beobachtungen, reduziert um die Anzahl aller Bindungen. Bindungen sind zum Beispiel die zu schätzenden Erwartungswerte. Im einfachsten Fall bedeutet dies folgendes: Wenn eine Messgröße durch n Beobachtungen erfasst wird, auf deren Basis eine Schätzung ihres Erwartungswertes erfolgen soll, dann gibt es aufgrund der Mittelwertbildung genau eine Bindung. Der statistische Freiheitsgrad f entspricht in diesem Falle dem um 1 reduzierten Stichprobenumfang, also $n - 1$. Wenn mehrere unbekannte Größen zum Beispiel k durch n Beobachtungen bestimmt werden sollen, ist der statistische Freiheitsgrad entsprechend $n - k$, denn es liegt eine k -fache Bindung der Beobachtungen vor. Wenn aber zwischen diesen k Größen ν unabhängige feste Beziehungen bestehen, liegt der statistische Freiheitsgrad um ν höher. Dies kann man so verstehen: Im Prinzip könnte man eine Anzahl ν der unbekannten Größen eliminieren, da die Beziehungen zwischen ihnen voneinander unabhängig sind. Die Bindung ist in diesem Fall $k - \nu$. Der statistische Freiheitsgrad wäre $n - k + \nu$. Das heißt, durch zusätzliche Gleichungen zwischen den Erwartungswerten, werden die Bindungen reduziert und der Freiheitsgrad erhöht. Allerdings sei noch einmal betont, dass die ν Beziehungen voneinander unabhängig ein müssen. Es muss also sicher sein, dass sich keine der Beziehungen rechnerisch aus einer anderen entwickeln lässt. Zusätzliche Gleichungen in Form von Nebenbedingungen sind somit gleichbedeutend mit einer Erhöhung des Freiheitsgrades. Neben den Beobachtungen und den durch sie zu schätzenden Erwartungswerten gibt es feste Parameter. Diese tragen nicht zum statistischen Freiheitsgrad bei. Dies trifft auch dann noch zu, wenn man die Parameter als „von außen steuerbare“ Variable definiert.

Im vorliegenden Fall der Massebestimmung ergibt sich der statistische Freiheitsgrad daraus, wie viel Elemente des Vektors der Wägewertabweichungen nicht gebunden sind. Je höher die Anzahl der Nebenbedingungen ist, desto größer ist der Freiheitsgrad, weil durch stärkere Bindungen der Masse- und *Vorlastwerte* untereinander effektiv mehr Komponenten des *Wägewertvektors* ungebunden sind. Dies soll nachstehend mit Hilfe einer Freiheitsgradsbilanz dargestellt werden.

Art der Beiträge zum Freiheitsgrad	Anzahl
Dimension des Vektors der <i>Wägewerte</i> entsprechend der Anzahl der <i>Wägeggleichungen</i>	n_w
Bindung durch Komponenten des <i>Massevektors</i>	$- n_o$
Bindung durch Komponenten des Vektors der Vorlastwerte	$- n_w$
Reduktion der Bindung durch „Nebenbedingung Masse“	1
Reduktion der Bindung durch Driftgleichungen	n_d
Vektor der <i>Driftänderungen</i> als Parameter	0
Resultierender statistischer Freiheitsgrad	$n_d - n_o + 1$

Es spielt keine Rolle, ob es sich um das unfreie oder freie Driftmodell handelt. Im Falle der Bilanz beim freien Driftmodell stelle man sich vor, dass der Parameter *Driftänderungsvektor* bereits auf die Lösung $\langle E \rangle$ eingestellt und fest vorgegeben ist. Dann würde auch das unfreie Driftmodell mit entsprechender

Inhomogenität $\langle \mathbf{E} \rangle$ in den *Driftgleichungen* die gleiche Lösung liefern, die sonst das freie Driftmodell geliefert hätte (siehe die Gleichung 3.2-10).

Der statistische Freiheitsgrad ist also

$$f = n_d - n_o + 1. \quad (6.2-1)$$

Er hängt nicht von der Anzahl der Wägungen, sondern von der Anzahl der Driftbedingungen ab. Die Anzahl der erforderlichen *Wägungen* bei gegebener Anzahl von *Driftbedingungen* richtet sich nach dem gewählten Driftmodell und dem gewählten *Substitutionsverfahren*. Die Standardabweichung wird somit zu

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_w} \langle \mathbf{e} \rangle^T \langle \mathbf{e} \rangle}{n_d - n_o + 1}} \quad (6.2-2)$$

geschätzt. Da der statistische Freiheitsgrad größer oder gleich 1 sein muss, damit die Standardabweichung definiert ist, ist die geringste Anzahl der erforderlichen Driftbeziehungen durch

$$n_d \geq n_o \quad (6.2-3)$$

festgelegt.

Im Falle der *Einfachsubstitution* mit einem unbekannten Objekt, also 2 Objekten, sind daher mindestens 2 Driftbeziehungen erforderlich (siehe Abschnitte 5.2 und 5.5). Die Anzahl der dazu erforderlichen Wägungen hängt vom Driftmodell ab: Im Falle einer alternierenden Beladung und konstanter Drift sind mindestens 4 Wägungen notwendig. Bei einer partiell konstanten Drift und durchgehendem Beobachtungszeitraum (Einfachsubstitution) sind 5 Wägungen erforderlich. Lösungsbeispiele mit den Angaben zu den Freiheitsgraden sind im Anhang unter 9.1 beziehungsweise 9.2 zu finden.

6.3 Mit dem Auftrieb verbundene Unsicherheiten des erweiterten Massevektors

Die in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren zur Massebestimmung durch Massevergleich basieren auf dem System von *Wägegleichungen* nach 2.2-6. Darin stellt der Ausdruck $\mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1}$ den Auftrieb dar, der zu jedem Objekt während der *Wägung* einen Beitrag zum *Wägewert* liefert. Wenn man die Möglichkeit hätte, die Luftdichte genau zeitgleich mit der Wägung ohne zufällige und systematische Abweichungen der Luftdichteparameter zu bestimmen und wenn man die Volumina beziehungsweise Materialdichten der Objekte genau kennen würde, gäbe es keinen Beitrag des Auftriebes zur Messunsicherheit der zu bestimmenden Massen. Jedoch muss man davon ausgehen, dass grundsätzlich Abweichungen von diesem Idealfall möglich sind, die sich auf die zu bestimmenden Massewerte in Form von Messunsicherheiten auswirken. Diese Auswirkung soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden. Insbesondere sollen die Formeln entwickelt werden, nach denen die Unsicherheit der Massewerte in Verbindung mit der Unsicherheit der Auftriebsparameter berechnet werden können.

Folgende Einflüsse des Auftriebs auf die Massewerte sind denkbar [29]:

- Die Auftriebsparameter Luftdruck, Temperatur und Relative Feuchte werden nicht genau zeitgleich mit der Wägung gemessen. Die zeitlichen Abweichungen sind zufällig (A).
- Aufgrund zufälliger Streuung der Einflussparameter der Luftdichteparameter treten bei den Messwerten Abweichungen zu den momentanen Erwartungswerten auf (A).
- Auch digitale Rundungen bewirken zufällige Abweichungen der Messwerte von den Erwartungswerten (A), wobei die Teilungswerte als klein vorausgesetzt werden.
- Bei der Justierung der Messgeräte für die Luftdichteparameter gibt es Abweichungen der angezeigten Werte vom Justierwert (B).
- Nach Justierung der Messgeräte, ändern sich die Empfindlichkeiten, so dass sie zu den Zeitpunkten der Messung verändert sind (B).
- Die Formel zur Berechnung der zum Auftrieb beitragenden Luftdichte ist mit einer Unsicherheit behaftet und liefert deshalb Abweichungen vom Auftriebserwartungswert (B).
- Die Materialdichten der Objekte sind nicht vollständig bekannt, weil auch diese Angaben mit einer Unsicherheit behaftet sind (B).
- Dabei stellt sich auch die Frage, ob die Materialdichten korreliert sind oder nicht (B).

Aus den durch A gekennzeichneten Einflüssen gehen Beiträge zur Typ A – Unsicherheit der zu bestimmenden Massewerte hervor. Entsprechend bewirken die mit B gekennzeichneten Einflüsse Beiträge zur Typ B – Unsicherheit [8].

6.3.1 Mit dem Auftrieb verbundene Differentialformen

Grundsätzlich werden *Varianzen* und *Kovarianzen* aus einer quadratischen Differentialform entwickelt, die das dyadische Produkt einer linearen Differentialform mit ihrer Transponierten darstellt. Im Falle der Luftdichte erzeugt man die lineare Differentialform aus den Diagonalelementen der Luftdichtematrix durch Multiplikation mit dem n_w – dimensionalen Vektor \mathbf{d} , dessen Komponenten gleich 1 sind:

$$d\mathbf{p}_a = d\mathbf{P}_a \mathbf{d}(n_w) \quad (6.3-1)$$

Die Differentialform enthält die Anteile Typ A und Typ B, die man in Gestalt von

$$d\mathbf{p}_a = d\mathbf{p}_a|_A + d\mathbf{p}_a|_B \quad (6.3-2)$$

voneinander trennen kann. Da die Anteile voneinander unabhängig sind, ergeben sich getrennte dyadische Produkte, also

$$(d\mathbf{p}_a) d\mathbf{p}_a^T = (d\mathbf{p}_a) d\mathbf{p}_a^T|_A + (d\mathbf{p}_a) d\mathbf{p}_a^T|_B. \quad (6.3-3)$$

Um die quadratische Form mit den Typ A – Beiträgen weiter zu entwickeln, setzt man voraus, dass die infinitesimalen Änderungen des Luftdichtevektors voneinander statistisch unabhängig und gleichen Betrages $(d\rho_{aA})^2$ sind. Dann ist also

$$(d\rho_a)d\rho_a^T|_A = (d\rho_{aA})^2 I_{n_w} . \quad (6.3-4)$$

Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit korrelieren die Typ A – Abweichungen der einzelnen Komponenten des Luftdichtevektors untereinander nicht. Bei den Typ B – Abweichungen hingegen besteht eine vollständige Korrelation zwischen den einzelnen Komponenten. Alle Abweichungen sind von demselben Betrag und demselben Vorzeichen.¹ Sie seien durch $d\rho_{aB}$ beschrieben. Dann gilt

$$d\rho_a|_B = d\rho_{aB} \mathbf{d}(n_w) \quad (6.3-5)$$

Die zugehörige quadratische Differentialform ist daher

$$(d\rho_a)d\rho_a^T|_B = (d\rho_{aB})^2 \mathbf{d}(n_w) \mathbf{d}(n_w)^T . \quad (6.3-6)$$

Die Struktur der quadratischen Differentialform der Luftdichte in Gleichung 6.3-3 ist also

$$(d\rho_a)d\rho_a^T = (d\rho_{aA})^2 I + (d\rho_{aB})^2 \mathbf{d}(n_w) \mathbf{d}(n_w)^T . \quad (6.3-7)$$

Im Anschluss an die Luftdichten werden nun die Materialdichten als quadratische Differentialform dargestellt. Es wird also das dyadische Produkt aus der linearen Differentialform $d\rho$ mit ihrer Transponierten gebildet. Hinsichtlich der Materialdichten der einzelnen Objekte greift man auf bestehende Informationen über die Unsicherheit zurück (Zertifikate, Dichtetabellen, eigene Messungen) [3], [4]. Die in den Dokumentationen zitierten Unsicherheiten werden als Abweichungen verstanden, die mathematisch nun als lineare Differentialform behandelt werden. Zurückgreifend auf die Dichtematrix \mathbf{P} ist die lineare Differentialform der Dichte

$$d\rho = d\mathbf{P} \mathbf{d}(n_o) \quad (6.3-8)$$

Die Information über die Dichte und deren Unsicherheit ist zwar notwendig aber nicht hinreichend, um die Rückwirkung auf die Unsicherheiten der zu bestimmenden Massewerte korrekt darstellen zu können. In der jeweiligen Anwendung muss zusätzlich geklärt werden, welche der Dichten des Gewichtsmaterials korreliert sind. Dabei spielt zum Beispiel die Frage eine Rolle, ob das Gewichtsmaterial derselben Historie unterliegt. Zum Beispiel kann der Hersteller dasselbe Material verwendet haben, dessen Dichtewert und Dichteunsicherheit pauschal für jedes Objekt eingesetzt wird. Oder die Dichten der Objekte sind individuell mit denselben Messgeräten bestimmt worden, so dass die Abweichungen von den Erwartungswerten stets gleich sind. Nach Klärung dieser Fragen kann man diejenigen Objekte einer Gruppe zuordnen, deren Dichteangaben auf denselben Ursprung zurückgehen. Dies lässt sich mathematisch auf folgende Weise zum Ausdruck bringen: Sei $k = 1, 2, \dots, n_g$ die Nummerierung der Dichtegruppen. Dann besteht der Dichtevektor ρ aus der Summe einzelner zueinander orthogonaler Dichtegruppenvektoren gemäß

$$\rho = \sum_{k=1}^{n_g} \rho_k \mathbf{d}(n_{ok}) . \quad (6.3-9)$$

In dieser Gleichung sind ρ_k die Dichtewerte der unterschiedlichen Gruppen. Die Vektoren $\mathbf{d}(n_{ok})$ haben n_{ok} Komponenten gleich 1 und $n_o - n_{ok}$ Komponenten gleich 0. Sie sind zueinander orthogonal, so dass

$$\mathbf{d}(n_{ok_1}) \mathbf{d}(n_{ok_2})^T = 0 \dots k_1 \neq k_2 \quad (6.3-10)$$

¹ Das gilt mit der Einschränkung, dass Messgeräte während einer Messreihe nicht gewechselt werden.

gilt. Aus den Gleichungen 6.3-9 und 6.3-10 ergibt sich für die quadratische Differentialform der Materialdichte

$$(d\rho)d\rho^T = \sum_{k=1}^{n_g} \mathbf{C}_k(\rho)(d\rho_k)^2 \quad (6.3-11)$$

mit

$$\mathbf{C}_k(\rho) = \mathbf{d}(n_{ok})\mathbf{d}(n_{ok})^T. \quad (6.3-12)$$

Die Dichtekorrelationen ergeben sich, wie oben beschrieben, aus der Kenntnis der Herkunft der Dichtewerte und lassen sich durch Ausführung des dyadischen Produkts der Vektoren $\mathbf{d}(n_{ok})$ als Matrix gestalten. Die Abbildung 6.3-1 zeigt ein Beispiel, in dem die Dichtewerte der Objekte 1, 2, 4 einerseits und der Objekte 3 und 5 andererseits auf gleiche Herkunft zurückzuführen sind¹.

$$\mathbf{C}_1(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3-13a)$$

$$(6.3-13b)$$

Abb. 6.3-1: Beispiel für Dichtekorrelationen

Nachdem die quadratischen Differentialformen der Einflussparameter dargestellt sind, geht es nun um die Frage nach der Rückwirkung auf die quadratische Differentialform des *erweiterten Massevektors*. Zunächst sollte die quadratische Differentialform der *Wägematrix* dargestellt werden. Dazu differenziert man die Gleichung 2.2-7 für die Wägematrix \mathbf{X} . Alle konstanten Elemente ergeben 0, so dass nur noch der Auftriebsterm übrig bleibt. Es ergibt sich

$$d\mathbf{X} = [\mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-2} d\mathbf{P} \mid \mathbf{0}] - [(d\mathbf{P}_a) \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mid \mathbf{0}] \quad (6.3-14)$$

Zur weiteren Bearbeitung multipliziert man diesen Ausdruck jetzt von rechts mit dem Massevektor nach Gleichung 2.2-8. Dann entfallen die *Vorlastwert*komponenten und es gilt

$$(d\mathbf{X})\mathbf{M} = \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-2} (d\mathbf{P})\mathbf{m} - (d\mathbf{P}_a) \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{m} \quad (6.3-15)$$

Es wird sich im nächsten Schritt als notwendig erweisen, dass die linearen Differentialformen der Material- und der Luftdichte nicht in Matrixform, sondern in Vektorform erscheinen. Dies kann man durch Umstellung der Größen in 6.3-15 erreichen. Dazu werden zunächst die Diagonalmatrizen $\mathbf{D}(\mathbf{m})$ und $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ definiert. Die Diagonalelemente dieser Matrizen sollen die als Argument angegebenen Vektoren \mathbf{m} beziehungsweise \mathbf{v} sein. Hierbei ist

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{m}) \mathbf{d}(n_o). \quad (6.3-16)$$

der Volumenvektor. Der Massevektor ist

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}(\mathbf{m}) \mathbf{d}(n_o), \quad (6.3-17)$$

der Volumenvektor je Wägung

$$\mathbf{v}_w = \mathbf{X}_w \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{d}(n_o). \quad (6.3-18)$$

¹ Sollte es keine Hinweise zu den Dichtewerten hinsichtlich einer eventuellen Korrelation geben, wird vorgeschlagen, von dem ungünstigsten Fall auszugehen, dass alle Dichtewerte korrelieren. Dann enthält die von dem Diagonalvektor aufgespannte Matrix nur Elemente vom Werte 1.

Wenn man die so definierten Diagonalmatrizen in die Gleichung 6.3-15 einarbeitet und darüber hinaus berücksichtigt, dass Produkte von Diagonalmatrizen dem Kommutativgesetz genügen, dann ergibt sich die gewünschte Umstellung:

$$(d\mathbf{X})\mathbf{M} = \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\rho} - \mathbf{D}(\mathbf{v}_w) d\boldsymbol{\rho}_a \quad (6.3-19)$$

Ziel der bisherigen Umformungen ist es, einen Ausdruck für die lineare Differentialform des erweiterten Massevektors zu entwickeln und aus diesem schließlich die quadratische Differentialform zu bilden. Dazu wird nun das System der Wägeggleichungen herangezogen, wobei in diesem Falle der Berechnung von Unsicherheiten nur die Erwartungswerte in Betracht zu ziehen sind. Durch Differenzieren der Gleichung 2.2-9 erhält man

$$\mathbf{X}d\mathbf{M} = -(d\mathbf{X})\mathbf{M} \quad \dots \quad \text{Differentielle Wägeggleichung} \quad (6.3-20)$$

Für $(d\mathbf{X})\mathbf{M}$ denke man sich nun die rechte Seite der Gleichung 6.3-19 eingesetzt. Auf der linken Seite steht die benötigte lineare Differentialform $d\mathbf{M}$ des erweiterten Massevektors. Nach ihr soll das Gleichungssystem aufgelöst werden. Das ist nur dann möglich, wenn neben der Gleichung 6.3-20 auch die Nebenbedingungen eingehalten werden. Es gelten somit auch die Gleichungen 2.2-10 und 3.2-9 in differentieller Form, also:

$$\mathbf{x}_i d\mathbf{M} = 0 \quad \dots \quad \text{Differentielle Nebenbedingung Masse} \quad (6.3-21)$$

$$\mathbf{D}d\mathbf{M} = 0 \quad \dots \quad \text{Differentielle Nebenbedingung Drift} \quad (6.3-22)$$

Das Gleichungssystem 6.3-20 bis 6.3-22 kann nach $d\mathbf{M}$ aufgelöst werden. Die Ausgangsgleichungen entsprechen denjenigen in Abschnitt 6.1 a), wobei an Stelle von \mathbf{y} der Ausdruck $-(d\mathbf{X})\mathbf{M}$, an Stelle von \mathbf{M} die zugehörige Differentialform und an Stelle von m_R und \mathbf{E} die Werte 0 eingesetzt werden. Die Vorgehensweise zum Auffinden der Lösung ist also ganz entsprechend. Die Lösung nach Gleichung 6.1-11 für die expandierte Form $d\mathbf{M}_e$ kann hier übernommen werden. Unter Anwendung der Gleichung 6.1-17 wird die Lösung auf die ersten $n_o + n_w$ Vektorkomponenten reduziert, weil nur diese benötigt werden. Ferner kommen nur die ersten n_w Spalten der Lösungsmatrix zur Wirkung, weil die Wägematrix \mathbf{X} durch n_w Zeilen gegeben ist. Somit ergibt sich schließlich

$$d\mathbf{M} = -\mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w)(d\mathbf{X})\mathbf{M}. \quad (6.3-23)$$

Unter Verwendung der Gleichung 6.1-19 erhält man schließlich den Zusammenhang zwischen den linearen Differentialformen des erweiterten Massevektors und des Luftdichte- sowie Materialdichtevektors:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w)(\mathbf{D}(\mathbf{v}_w) d\boldsymbol{\rho}_a - \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{P}^{-1} d\boldsymbol{\rho}). \quad (6.3-24)$$

Auf dieser Grundlage kann jetzt die quadratische Differentialform $(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T$ des erweiterten Massevektors gebildet werden. Wie bereits oben dargestellt, gibt es die folgenden voneinander unabhängigen Beiträge:

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho_a A} \quad \dots \quad \text{Assoziation mit Typ A – Unsicherheiten der Luftdichte} \quad (6.3-25)$$

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho_a B} \quad \dots \quad \text{Assoziation mit Typ B – Unsicherheiten der Luftdichte} \quad (6.3-26)$$

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho} \quad \dots \quad \text{Assoziation mit Unsicherheiten der Materialdichte (B)} \quad (6.3-27)$$

Die vollständige quadratische Differentialform des erweiterten Massevektors ist

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T = (d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho_a A} + (d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho_a B} + (d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho}. \quad (6.3-28)$$

6.3.2 Typ A - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten

Die Varianzen und Kovarianzen ergeben sich aus dem ersten Summanden der Gleichung 6.3-28. Sie werden mit Hilfe einer Kovarianzmatrix dargestellt.

Zunächst einige Bemerkungen zur Darstellung von Varianzen und Kovarianzen in Matrixform: Kovarianzmatrizen werden durch \mathbf{V} symbolisiert, ergänzt durch einen Vektor auf der Höhe der Indizes. Dies ist der Vektor, für den die Varianzen und Kovarianzen dargestellt werden. Eine zusätzliche Charakterisierung wie Typ A oder Typ B erscheint ebenfalls als Index. Die Kovarianzmatrix ist stets symmetrisch. Ihre Diagonalelemente stellen die Varianzen der betreffenden Vektorvariablen dar. Die Elemente außerhalb der Diagonalen sind die Kovarianzen zwischen den unterschiedlichen Vektorkomponenten. Die Positionen der Zeile und Spalte geben jeweils an, um welche der Komponenten es sich handelt. Als Argument wird dargestellt, mit welcher Einflussgröße die Varianzen und Kovarianzen assoziiert sind. Im vorliegenden Fall ist also $\mathbf{V}_{MA}(\rho_a)$ die Typ A - Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors \mathbf{M} , die mit der Luftdichte ρ_a assoziiert ist.

Wie bereits beschrieben, werden Beziehungen zwischen den Varianzen und Kovarianzen voneinander abhängiger Größen mathematisch mit Hilfe von Differentialformen behandelt. Dabei muss stets klar sein, welche Differentialformen und Varianzen beziehungsweise Kovarianzen miteinander korrespondieren. Im vorliegenden Fall gibt es folgende Korrespondenzen:

$$(d\rho_{aA})^2 \leftrightarrow u_{\rho_{aA}}^2 \quad \dots \quad \text{Typ A – Varianz der Luftdichte} \quad (6.3-29)$$

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T|_{\rho_{aA}} \leftrightarrow \mathbf{V}_{MA}(\rho_a) \quad \dots \quad \text{Typ A – Varianzen und Kovarianzen des Massevektors assoziiert mit der Luftdichte} \quad (6.3-30)$$

Nach den Gleichungen 6.3-4 und 6.3-24 und diesen Korrespondenzen kann die Bestimmungsgleichung für die Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors in Abhängigkeit von der Typ A – Standardunsicherheit dargestellt werden:

$$\mathbf{V}_{MA}(\rho_a) = \mathbf{S}(n_o + n_w | n_w) \mathbf{D}^2(\mathbf{v}_w) \mathbf{S}^T(n_w | n_o + n_w) u_{\rho_{aA}}^2 \quad (6.3-31)$$

Während die Typ A - Kovarianzmatrix der Luftdichte noch diagonal ist, trifft dies nicht mehr zu für die damit verbundene Kovarianzmatrix der Massewerte.

Die sich aus der Lösung der Gleichungssysteme ergebenden Residuen hängen davon ab, welche zufälligen Werte für die Auftriebskorrektur in das Gleichungssystem eingegeben werden. Die statistischen Schwankungen der Auftriebskorrektur sind daher bereits anteilig in der Standardabweichung enthalten, die nach Gleichung 6.1-5 mit Hilfe der Summe der Quadrate der Residuen geschätzt wird. Aus diesem Grunde führen die Varianzen und Kovarianzen nach Gleichung 6.3-31 nicht zu einem weiteren Beitrag im Budget der Varianzen und Kovarianzen. Insofern handelt es sich hier nur um die Möglichkeit, abschätzen zu können, welcher Anteil an den Typ A – Varianzen und Kovarianzen auf die zufälligen Schwankungen der Luftdichtewerte zurückgeführt werden kann.

6.3.3 Typ B - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten

Die zugehörigen Varianzen und Kovarianzen ergeben sich aus dem zweiten Summanden der Gleichung 6.3-28. Die folgenden Korrespondenzen kommen zur Anwendung:

$$(d\rho_{aB})^2 \leftrightarrow u_{\rho_{aB}}^2 \quad \dots \quad \text{Typ B – Varianz der Luftdichte} \quad (6.3-32)$$

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T|_{\rho_{aB}} \leftrightarrow \mathbf{V}_{MB}(\rho_a) \quad \dots \quad \text{Typ B - Varianzen und Kovarianzen des Massevektors assoziiert mit der Luftdichte} \quad (6.3-33)$$

Nach den Gleichungen 6.3-6, 6.3-18 und 6.3-24 und mit Hilfe dieser Korrespondenzen kann die Bestimmungsgleichung für die Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors in Abhängigkeit von der Typ B – Standardunsicherheit der Luftdichte dargestellt werden:

$$\mathbf{V}_{MB}(\rho_a) = \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}_w^T \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) u_{\rho_a B}^2 \quad (6.3-34)$$

Beispiel:

Zwei Objekte, Varianz und Kovarianz der Massewerte

Die erste Spalte der Schemamatrix \mathbf{X}_w ist dem Normal (N), die zweite Spalte dem zu kalibrierenden Objekt (P) zugeordnet. Die Spalten der Schemamatrix seien \mathbf{d}_{wN} und \mathbf{d}_{wP} :

$$\mathbf{X}_w = [\mathbf{d}_{wN} \quad \mathbf{d}_{wP}] \quad (6.3-35)$$

Diese Vektoren bilden zusammen den Vektor

$$\mathbf{d}_{wN} + \mathbf{d}_{wP} = \mathbf{d}(n_w), \quad (6.3-36)$$

da entweder das eine oder das andere Objekt einen Wägewert liefert. Zum weiteren Vorgehen greift man auf eine in Abschnitt 5.4 erarbeitete Eigenschaft der Lösungsmatrix zurück. Nach Gleichung 5.4-5 verschwindet die Summe der Wägewert - Koeffizienten, die den Massen (nicht den Vorlastwerten) zugeordnet sind. Daher ist

$$\mathbf{S}(n_o \mid n_w) \mathbf{X}_w = \mathbf{S}(n_o \mid n_w) \mathbf{d}_{wN} [1 \quad -1]. \quad (6.3-37)$$

Einsetzen in 6.3-34 ergibt für den Massevektor \mathbf{m} die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{V}_{mB}(\rho_a) = u_{\rho_a B}^2 \left(\frac{m_P}{\rho_P} - \frac{m_N}{\rho_N} \right)^2 \mathbf{S}(n_o \mid n_w) \mathbf{d}_{wN} \mathbf{d}_{wN}^T \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o). \quad (6.3-38)$$

Darüber hinaus ergibt sich in Anlehnung an Abschnitt 5.4.10, dass die Summe der positiven Elemente der Lösungsmatrix gleich 1 beziehungsweise die Summe der negativen Elemente gleich -1 ist. Es zeigt sich also, dass der weitere Inhalt der Lösungsmatrix für die Unsicherheit des Kalibrierobjektes im Falle systematischer Abweichungen bei der Luftdichte keinen Einfluss hat. Das Wägeschema spielt also keine Rolle:

$$u_{mB}(\rho_a) = u_{\rho_a B} \left| \frac{m_P}{\rho_P} - \frac{m_N}{\rho_N} \right|. \quad (6.3-39)$$

6.3.4 Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Materialdichten

Die zugehörigen Varianzen und Kovarianzen ergeben sich hier aus dem dritten Summanden der Gleichung 6.3-28. Die folgenden Korrespondenzen kommen zur Anwendung:

$$(d\rho_k)^2 \leftrightarrow u_{\rho_k}^2 \quad \dots \quad \text{Typ B – Varianz der Dichte (siehe Gleichung 6.3-11)} \quad (6.3-40)$$

$$(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T \Big|_{\rho} \leftrightarrow \mathbf{V}_M(\underline{\rho}) \quad \dots \quad \text{Typ B - Varianzen und Kovarianzen des Massevektors assoziiert mit der Materialdichte} \quad (6.3-41)$$

Nach den Gleichungen 6.3-11 und 6.3-24 und mit Hilfe dieser Korrespondenzen kann die Bestimmungsgleichung für die Kovarianzmatrix des erweiterten Massevektors in Abhängigkeit von der Typ B – Standardunsicherheit der Materialdichte dargestellt werden:

$$\mathbf{V}_M(\rho) = \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{P}_a \mathbf{X}_w \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{P}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n_g} u_{\rho_k}^2 \mathbf{C}_k(\rho) \right) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{X}_w^T \mathbf{P}_a \mathbf{S}^T(n_w \mid n_o + n_w) \quad (6.3-42)$$

6.4 Näherungsformeln für mit dem Auftrieb verbundene Varianzen und Kovarianzen

6.4.1 Typ A - Varianzen und Kovarianzen assoziiert mit den Luftdichten

In den Bestimmungsgleichungen 6.3-31, 6.3-34 und 6.3-42 der *Kovarianzen* des erweiterten *Massevektors* kommt die *Schemamatrix* \mathbf{X}_w aufgrund von 6.3-16 sowohl direkt als auch indirekt in der Lösungsmatrix \mathbf{S} vor. Mit jedem \mathbf{X}_w in der Lösungsmatrix sind Auftriebsterme verbunden, die durch die Luftdichten und Materialdichten (siehe zum Beispiel Gleichung 2.2-7) bestimmt sind. In der Regel ist es ausreichend, dass man in den Auftriebstermen den Mittelwert der Luftdichten einsetzt. Es gilt also die in Abschnitt 5.6 hergeleitete Approximation mit Gleichung 5.6-8. Bei der Bildung der Differentialformen $(d\mathbf{M})d\mathbf{M}^T$ in Gleichung 6.3-28 war die Bezugsmasse dort eine konstante Größe. Deshalb wird hier von \mathbf{M} nur derjenige Anteil übernommen, der die *Wägewerte* \mathbf{Y} enthält. Ferner kann man Terme mit Luftdichten in Potenzen höher als 1 vernachlässigen. In dieser Approximation sind daher die mit den zufälligen Schwankungen der Luftdichte verbundenen Varianzen und Kovarianzen durch

$$\mathbf{V}_{MA}(\rho_a) = \left(\mathbf{I} + \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o}^T \right) \mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{D}^2(\mathbf{v}) \mathbf{S}_0^T (n_w \mid n_o + n_w) \left(\mathbf{I} + \overline{\rho_a} \mathbf{I}_{n_o}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{n_o} \right) \mu_{\rho_a A}^2 \quad (6.4-1)$$

bestimmt. Der Vorteil dieser Gleichung ist, dass man bei festgelegtem Kalibrierverfahren auf gegebene und konstante Vektoren und Matrizen zurückgreifen kann. Diese sind der Volumenvektor \mathbf{v} und die Lösungsmatrix \mathbf{S}_0 , die sich aus dem *Wägeschema* ergibt. Bei der Auswertung einer aktuellen Messreihe brauchen dann nur noch die mittlere Luftdichte, die Materialdichten und die Typ A – Luftdichteunsicherheit eingesetzt zu werden. Letztere würde sich zum Beispiel aus der Standardabweichung der Luftdichtewerte ergeben, die man simultan mit den Wägungen ermittelt.

In einer weiteren Approximation ist es in der Regel ausreichend, wenn man alle Terme, die die mittlere Luftdichte enthalten, ganz vernachlässigt, denn im Vergleich zu den Materialdichten enthalten sie stets kleine Werte. Dann vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung der Typ A – Kovarianzmatrix zu

$$\mathbf{V}_{MA}(\rho_a) \approx \mathbf{S}_0 (n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{D}^2(\mathbf{v}) \mathbf{S}_0^T (n_w \mid n_o + n_w) \mu_{\rho_a A}^2 \quad (6.4-2)$$

Für ein Element jk der Kovarianzmatrix bedeutet diese Gleichung

$$V_{jkMA}(\rho_a) \approx \mu_{\rho_a A}^2 \sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} S_{0ki} v_i^2. \quad (6.4-3)$$

Falls $j = k$ ist, gilt insbesondere für die *Varianzen* beziehungsweise Standardunsicherheiten

$$u_{MAj}^2(\rho_a) \approx \mu_{\rho_a A}^2 \sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji}^2 v_i^2. \quad (6.4-4)$$

Die Koeffizienten S_{0ji} zu den Wägewerten werden, wie bereits dargestellt, für den Vakuumfall berechnet und hier eingesetzt (siehe Abschnitt 5-2).

6.4.2 Systematische Abweichungen der Luftdichte

Bei der Bestimmung der Luftdichte zeigen die benutzten Messinstrumente Justier- und Empfindlichkeitsabweichungen. In diesem Falle handelt es sich um systematische Abweichungen, die, solange keine neuen Gerätedaten vorliegen, während der gesamten Wägereihe wirksam sind. Die Näherungsgleichung für die Varianzen und Kovarianzen, die mit den systematischen Abweichungen bei der Luftdichtebestimmung verbunden sind, basiert auf Gleichung 6.3-34. Setzt man für die Luftdichten wieder den Durchschnittswert ein und vernachlässigt die Auftriebsterme in der Lösungsmatrix, so ergibt sich die Typ B - Kovarianzmatrix

$$\mathbf{V}_{MB}(\rho_a) = \mathbf{S}_0(n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{X}_w \mathbf{P}^{-1} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}_w^T \mathbf{S}_0^T(n_w \mid n_o + n_w) u_{\rho_a B}^2 \quad (6.4-5)$$

Für ein Element jk der Kovarianzmatrix gilt daher

$$V_{jkMB}(\rho_a) \approx u_{\rho_a B}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} \frac{m_i}{\rho_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{n_w} S_{0ki} \frac{m_i}{\rho_i} \right). \quad (6.4-6)$$

Hier sind für m_i beziehungsweise ρ_i die jeweils einer Messung zugeordneten Werte für die Massen und Materialdichten einzusetzen. Falls $j = k$ ist, gilt insbesondere für die Varianzen beziehungsweise Standardunsicherheiten

$$u_{jMB}(\rho_a) \approx u_{\rho_a B} \left| \sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} \frac{m_i}{\rho_i} \right|. \quad (6.4-7)$$

Für den Fall zweier Objekte und $j = 2$ sei auf Gleichung 6.3-39 und die dortige Herleitung verwiesen.

6.4.3 Einfluss der Materialdichte

Auf entsprechende Weise wird nun die Näherungsformel der mit den Materialdichten verbundenen Varianzen und Kovarianzen dargestellt. Dazu geht man von der allgemeinen Gleichung 6.3-42 aus. Für die Luftdichtematrix \mathbf{P}_a setzt man die durchschnittliche Luftdichte ein. Wenn man alle Terme mit Potenzen des Verhältnisses zwischen den Luft- und Materialdichten größer als 1 vernachlässigt, ergibt sich

$$\mathbf{V}_M(\rho) = \overline{\rho_a}^{-2} \mathbf{S}_0(n_o + n_w \mid n_w) \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{P}^{-1} \left(u_{\rho_k}^2 \sum_{k=1}^{n_g} \mathbf{C}_k(\rho) \right) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{S}_0^T(n_w \mid n_o + n_w) \quad (6.4-8)$$

Zur weiteren Berechnung dieser Kovarianzmatrix muss die Dichtekorrelation nach Gleichung 6.3-12 festgelegt werden.

Fall 1: Die Dichten der an der Kalibrierung beteiligten Objekte seien korreliert. Es gibt nur eine Korrelationsmatrix. Alle ihre Elemente sind gleich 1. Für alle Objekte gibt es nur einen Dichtewert mit einer Dichteunsicherheit. Dann ergeben sich für die Kovarianzen die Komponenten

$$V_{jkM}(\rho) = \overline{\rho_a}^{-2} \frac{u_{\rho}^2}{\rho^4} \left(\sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} m_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n_w} S_{0ki} m_i \right) \quad (6.4-9)$$

Hier ist für m_i der jeweils einer Messung zugeordnete Massewert einzusetzen. Falls $j = k$ ist, gilt insbesondere für die Varianzen beziehungsweise Standardunsicherheiten

$$u_{jM}(\rho) \approx \overline{\rho_a} \frac{u_{\rho}}{\rho^2} \left| \sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} m_i \right|. \quad (6.4-10)$$

Im Falle von zwei Objekten vereinfacht sich dieser Ausdruck für das zu kalibrierende Objekt zu

$$u_{jM}(\rho) \approx \overline{\rho_a} \frac{u_{\rho}}{\rho^2} |m_P - m_N|. \quad (6.4-11)$$

Die Herleitung erfolgt entsprechend zu Gleichung 6.3-39.

Fall 2: Die Dichten der an der Kalibrierung beteiligten Objekte seien unkorreliert. Die Korrelationsmatrizen enthalten also jeweils nur ein Diagonalelement gleich 1 in den

verschiedenen Positionen. Die übrigen Elemente sind gleich 0. Dann ergeben sich für die Kovarianzen die Komponenten

$$V_{jkM}(\rho) = \overline{\rho_a}^{-2} \sum_{i=1}^{n_w} S_{0ji} S_{0ki} \frac{m_i^2}{\rho_i^4} u_{\rho i}^2 \quad (6.4-12)$$

Falls $j = k$ ist, gilt insbesondere für die Varianzen beziehungsweise Standardunsicherheiten

$$u_{jM}^2(\rho) \approx \overline{\rho_a}^{-2} \sum_{i=1}^{n_w} \left(S_{0ji} \frac{m_i}{\rho_i^2} u_{\rho i} \right)^2. \quad (6.4-13)$$

In diese Gleichung sind für die Größen m_i , ρ_i und $u_{\rho i}$ ihre der jeweiligen Messung zugeordneten Werte einzusetzen.

6.4.4 Beispiele zur Einfachsubstitution

Dieses Beispiel zur *Einfachsubstitution* ist insofern interessant, als in dieser Arbeit für die Elemente der Lösungsmatrix Zahlenwerte erarbeitet wurden, die denen der herkömmlichen Praxis nicht mehr entsprechen. In diesem Beispiel soll der Fall zweier Objekte behandelt werden. Die Dichten des Normal und des Prüflings seien unkorreliert. Die Unsicherheit des Prüflings errechnet sich nach den Formeln 6.4-4, 6.3-39 und 6.4-13. Für die Lösungsmatrix wird auf Tabelle 5.2-5 zurückgegriffen.

Die Bestimmungsgleichung zur Abschätzung des Anteils der Typ A – Unsicherheit der Masse des Prüflings, der mit der Luftdichte assoziiert ist, hat die Form

$$u_A(\rho_a) \approx u_{\rho_a A} \frac{1}{A} \sqrt{a_N \frac{m_N^2}{\rho_N^2} + a_P \frac{m_P^2}{\rho_P^2}}. \quad (6.4-14)$$

Die Werte von A , a_N und a_P hängen von der Anzahl n_d der *Zyklen* ab. In der Tabelle 6.4-1 sind die Werte aufgelistet. Die Einzelheiten der Rechnung sind im Anhang unter 9.5 zu finden.

Wägewerte Zyklen Objekt	$n_w = 5$ $n_d = 2$		$n_w = 7$ $n_d = 3$		$n_w = 9$ $n_d = 4$		$n_w = 11$ $n_d = 5$	
	N	P	N	P	N	P	N	P
Faktoren a	3/8	1/2	53	66	207/8	61/2	6051/2	3459
Nenner A	1		14		11		131	

Tab. 6.4-1: Zahlenwerte a_N , a_P und A in Abhängigkeit von der Anzahl der Wägewerte

Die Bestimmungsgleichung für die Unsicherheit des Kalibrierobjektes, die mit den Unsicherheiten der Materialdichten von Normal und Prüfling verbunden sind ergeben sich entsprechend 6.4-14 zu

$$u^2(\rho) \approx \overline{\rho_a} \frac{1}{A} \sqrt{a_N \frac{m_N^2}{\rho_N^4} u_{\rho N}^2 + a_P \frac{m_P^2}{\rho_P^4} u_{\rho P}^2}. \quad (6.4-15)$$

6.5 Mit dem Normal assoziierte Unsicherheiten

Die *Varianzen* und *Kovarianzen* beziehungsweise die Unsicherheiten, die mit dem Bezugsnormal verbunden sind, ergeben sich aus den hier erarbeiteten Methoden so, wie grundsätzlich zu erwarten ist. Dennoch sollen der Vollständigkeit halber auch für diesen Fall die Bestimmungsgleichungen der Kovarianzmatrix und der Unsicherheiten anhand der Lösungsformeln hergeleitet werden.

Dazu wird zunächst die lineare Differentialform des erweiterten *Massevektors* gebildet. Es wird in diesem Fall nur der Massewert des Normals als variabel zugelassen. Dann ergibt sich aus den Lösungsgleichungen 5.1-17 und 5.1-18 beziehungsweise 5.3-30

$$d\mathbf{M}_e|_{m_R} = \mathbf{S} d\mathbf{Y}_e|_{m_R} \quad (6.5-1)$$

Das Bezugsnormal ist lediglich im letzten Element des expandierten *Wägewertvektors* enthalten (siehe die Gleichungen 5.1-13 beziehungsweise 5.3-24). Alle anderen Elemente der Differentialform des erweiterten Wägewertvektors sind 0. Somit ist

$$d\mathbf{M}|_{m_R} = \mathbf{S}(1 \leq i \leq n_o + n_w \mid j_{\max}) dm_R \quad (6.5-2)$$

Die quadratische Differentialform des erweiterten Massevektors ist daher

$$d\mathbf{M} d\mathbf{M}^T|_{m_R} = \mathbf{S}(j_{\max}) \mathbf{S}(j_{\max})^T (dm_R)^2. \quad (6.5-3)$$

Wenn man die relativ geringen Auftriebsterme vernachlässigt, kann die Lösungsmatrix \mathbf{S} bei der Schätzung der Varianzen und Kovarianzen durch \mathbf{S}_0 ersetzt werden (siehe Abschnitt 5.6). In Abschnitt 5.4 ist die Wertestruktur der letzten Spalte der Lösungsmatrix bereits dargestellt worden (siehe Abbildung 5.4-6). Es ist also das dyadische Produkt des Vektors

$$\mathbf{S}_0(j_{\max}) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0(1 \leq i \leq n_o \mid j_{\max}) \\ \mathbf{S}_0(n_o + 1 \leq i \leq n_o + n_w \mid j_{\max}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (6.5-4)$$

mit seiner Transponierten zu bilden. Die Kovarianzmatrix ist dann

$$\mathbf{V}_M(m_R) = u_{m_R}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_o n_o} & -\mathbf{C}_{n_o n_w} \\ -\mathbf{C}_{n_w n_o} & \mathbf{C}_{n_w n_w} \end{bmatrix}. \quad (6.5-5)$$

Die Matrizen \mathbf{C} enthalten nur Elemente vom Werte 1. Die Indizes n_o und n_w geben die jeweilige Matrixdimension an. Wie zu erwarten war, sind die Unsicherheiten der Massen und *Vorlastwerte*, die mit der Unsicherheit der Bezugsmasse verbunden sind:

$$u_M(m_R) = u_{m_R}. \quad (6.5-6)$$

6.6 Typ A – Unsicherheit von Massedifferenzen

6.6.1 Schätzung auf der Basis der Wägewerte

In Abschnitt 6.1 wurde eine Gleichung zur Bestimmung der *Typ A – Unsicherheit* der Massen der zu kalibrierenden Objekte hergeleitet. Da im Allgemeinen nur die Massen \mathbf{m} und nicht die *Vorlastwerte* \mathbf{m}_p von Interesse sind, soll hier von der auf \mathbf{M} bezogenen *Kovarianzmatrix* die Teilmatrix herausgegriffen werden, die dem *Massevektor* zugeordnet ist. Nach Gleichung 6.1-24 ist

$$\mathbf{V}_{mA} = s^2 \mathbf{I}_{n_o} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o} . \quad (6.6-1)$$

In der Praxis werden häufig die Massedifferenzen zwischen den Prüflingen und dem Normal bestimmt. In diesem Abschnitt soll die Bestimmungsgleichung für die Typ A – Unsicherheiten der Massedifferenzen hergeleitet werden.

Der Vektor $\Delta \mathbf{m}$ der Massedifferenzen ergibt sich aus dem Massevektor \mathbf{m} durch eine lineare Beziehung in der Form

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{B} \mathbf{m} . \quad (6.6-2)$$

Unter der Voraussetzung, dass im Massevektor das Normal in der ersten Position dargestellt ist, gilt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \quad (6.6-3)$$

Die Matrix \mathbf{B} besteht aus $n_o - 1$ Zeilen und n_o Spalten. Unter Beachtung von 6.1-23 folgt hieraus für die Kovarianzmatrix der Massedifferenzen

$$\mathbf{V}_{\Delta mA} = s^2 \mathbf{B} \mathbf{I}_{n_o} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{B}^T . \quad (6.6-4)$$

In Verbindung mit 6.1-5e für die Typ A – Varianz s^2 der Wägungen und 6.2-1 für den *statistischen Freiheitsgrad* f ist dann

$$\mathbf{V}_{\Delta mA} = \frac{1}{n_d - n_o + 1} \mathbf{B} \mathbf{I}_{n_o} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_{n_o} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{S}(n_o + n_w \mid n_w)) \mathbf{Y} . \quad (6.6-5)$$

Es soll jetzt der besondere Fall von nur 2 Objekten betrachtet werden. Die Varianz der Massedifferenz ergibt sich in diesem Fall aus der ersten Zeile von \mathbf{B} zu

$$V_{(m_p - m_N)A} = s^2 (-1 \ 1) \mathbf{I}_2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} \mathbf{I}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (6.6-6)$$

Für die Standardabweichung s der Wägungen ist das Ergebnis aus einer der Gleichungen 6.1-5 einzusetzen.

Da die erste Zeile und die erste Spalte der inversen expandierten Normalmatrix bis auf das letzte Element aus Elementen Null besteht, trägt im Falle von 2 Objekten hier nur das Element $i = 2, j = 2$ bei. Also ist

$$V_{(m_p - m_N)A} = \frac{1}{n_d - 1} ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1})_{22} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{S}(n_w + 2 \mid n_w)) \mathbf{Y} . \quad (6.6-7)$$

Zur Vereinfachung der Schätzung der Varianz kann man bei der *Wägematrix* in der Regel die Auftriebsterme vernachlässigen. In diesem Falle ersetzt man \mathbf{X} durch \mathbf{X}_0 :

$$V_{0(m_p - m_N)A} = \frac{1}{n_d - 1} \left((\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0)^{-1} \right)_{22} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}_0 \mathbf{S}_0 (n_w + 2 \mid n_w)) \mathbf{Y} . \quad (6.6-8)$$

6.6.2 Schätzung auf der Basis von Wägewertdifferenzen

Die folgende Betrachtung bezieht sich wieder auf den Fall zweier Objekte unter Vernachlässigung des Auftriebs. Bei der Bestimmung der Massedifferenz zwischen Prüfling und Normal wurde nach Anwendung des Prinzips der geringsten Abweichungsquadrate festgestellt, dass die resultierende Massedifferenz durch *Zyklusdifferenzen* ausgedrückt werden kann (siehe Abschnitt 5.2). Es stellt sich jetzt die Frage, ob es nicht auch möglich ist, die Varianz der Massedifferenz anstelle von 6.6-8 durch die Standardabweichung der Zyklusdifferenzen auszudrücken. Die Frage ist nur dann sinnvoll, wenn es sich um eine Reihe gleichartiger Zyklen handelt.

Bekannter Weise können Erwartungswerte nur geschätzt werden, weil stets nur ein begrenzter Stichprobenumfang zur Verfügung steht. Schätzungen können von unterschiedlicher Genauigkeit sein. Dies hängt unter anderem auch von dem gewählten Ansatz beziehungsweise von dem gewählten Modell ab [13], [15], [16], [17]. Die in dieser Arbeit behandelten Modelle (*LD-Verfahren* nach Abschnitt 5.1 beziehungsweise *LDA-Verfahren* nach Abschnitt 5.3) stellen eine Präzisierung der bisher verwendeten Auswerteverfahren von *Substitutionswägungen* dar, wobei auf bestimmte Weise jetzt auch die *Drift* berücksichtigt wird. Daher wird die Schätzung 6.6-8 als von höherer Genauigkeit angesehen als die bisherigen Schätzungen. Bei den herkömmlichen Auswerteverfahren hat man die Schätzung der Massedifferenz stets auf der Grundlage von *Wägewertdifferenzen* hergeleitet. Auf die Entwicklung der *Vorlastwerte* kam es nicht an. Daher ist für Gleichung 6.6-8 die Möglichkeit einer Rückführung auf Wägewertdifferenzen in Frage gestellt. Zur Bestätigung dieser Vermutung sei als Beispiel die dritte Zeile der Lösungsmatrix \mathbf{S} im Falle der *Einfachsubstitution* bei 2 Zyklen genannt (siehe Abschnitt 5.2). Man erkennt unmittelbar, dass die Gleichung $\mathbf{S}_{03} \mathbf{Y} = 9/10 Y_1 + 1/5 Y_2 - 1/5 Y_4 + 1/10 Y_5$ nicht durch eine Gleichung mit den Zyklusdifferenzen $\Delta Y_1 = Y_2 - (Y_1 + Y_3)$ und $\Delta Y_2 = Y_4 - (Y_3 + Y_5)$ ausgedrückt werden kann. Das Beispiel steht für den allgemeinen Fall: Eine Schätzung der Unsicherheit der Massedifferenz nach Anwendung der Verfahren LD oder LDA kann nicht auf der Basis von Wägewertdifferenzen erfolgen.

Verzichtet man allerdings auf höchste Schätzgenauigkeit, so ist die Verwendung von Zyklusdifferenzen für eine Schätzung der Unsicherheit der Massedifferenz möglich. Dies wird nachfolgend gezeigt. In Abschnitt 4.5 wurde der gewichtete Mittelwert der Zyklusdifferenzen gebildet. Dazu wurde entsprechend Gleichung 4.4-3 die *Zyklusmatrix* \mathbf{X}_z verwendet:

$$\overline{\Delta Y} = \mathbf{w}_z^T \mathbf{X}_z \mathbf{Y} . \quad (6.6-9)$$

Dies war erforderlich, um die Massedifferenz anhand der mittleren Zyklusdifferenz zu berechnen. Die zugehörige Varianz der Zyklusdifferenzen folgt dann aus der Abweichung der Elemente des Vektors $\Delta \mathbf{Y}$ der Zyklusdifferenzen von der mittleren Zyklusdifferenz, also aus

$$\delta \Delta \mathbf{Y} = \Delta \mathbf{Y} - d_{n_d} \overline{\Delta Y} \quad (6.6-10)$$

zu

$$s^2(\Delta Y) = \frac{1}{n_d - 1} \delta \Delta \mathbf{Y}^T \delta \Delta \mathbf{Y} \quad (6.6-11)$$

In die Gleichung 6.6-8 gingen die einzelnen Wägewerte \mathbf{Y} , nicht aber die Wägewertdifferenzen $\Delta \mathbf{Y}$ ein, denn die Grundlage der Herleitung war die für jede einzelne Wägung geltende Gleichung 2.2-6. Zyklenkorrelationen haben also dort keine Rolle gespielt. Um jetzt hier eine Beziehung zwischen der Varianz der Massedifferenz und der Varianz der Zyklusdifferenzen herzustellen, ist zu berücksichtigen, dass Zyklen je nach Wägeschema korrelieren können. Dazu wird unter Verwendung

der Erwartungswerte \mathbf{y} zunächst die dyadische quadratische Differentialform des Vektors der Abweichungen der Zyklusdifferenzen von ihrem Erwartungsmittelwert gebildet:

$$(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})^\top = (\mathbf{I} - \mathbf{d}_{n_d} \mathbf{w}_z^\top) \mathbf{X}_z \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{y}^\top \mathbf{X}_z^\top (\mathbf{I} - \mathbf{w}_z \mathbf{d}_{n_d}^\top) \quad (6.6-12)$$

Da aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der zufälligen Änderungen der Wägewerte $\mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{y}^\top = \mathbf{I} (\mathrm{d}\mathbf{y})^2$ ist, folgt daraus

$$(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})^\top = (\mathbf{I} - \mathbf{d}_{n_d} \mathbf{w}_z^\top) \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^\top (\mathbf{I} - \mathbf{w}_z \mathbf{d}_{n_d}^\top) (\mathrm{d}\mathbf{y})^2. \quad (6.6-13)$$

Die Schätzungen der Erwartungswerte beruhen auf folgenden Beziehungen:

$$(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})(\mathrm{d}\delta\Delta\mathbf{y})^\top \leftrightarrow \mathbf{V}_{\Delta\mathbf{y}} = \delta\Delta\mathbf{Y} \delta\Delta\mathbf{Y}^\top. \quad (6.6-14)$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{y})^2 \leftrightarrow s^2. \quad (6.6-15)$$

Also ist

$$\mathbf{V}_{\Delta\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{d}_{n_d} \mathbf{w}_z^\top) \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^\top (\mathbf{I} - \mathbf{w}_z \mathbf{d}_{n_d}^\top) s^2. \quad (6.6-16)$$

Jedes Element der Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_{\Delta\mathbf{y}}$ ergibt sich aus einer Schätzung der Varianz s^2 der Wägewerte. Umgekehrt ergibt sich die Varianz der Wägewerte aus Schätzungen von Elementen der Kovarianzmatrix. Greift man dazu die Diagonalelemente heraus, so beschränkt man sich bei der Schätzung auf die Quadrate der Abweichungen der Zyklusdifferenzen von der mittleren Zyklusdifferenz. Auf diese Weise erhält man einen Bezug zur Varianz $s^2(\Delta Y)$ der Zyklusdifferenzen gemäß¹:

$$s^2(\Delta Y) = \frac{1}{n_d - 1} \mathrm{Sp}((\mathbf{I} - \mathbf{d}_{n_d} \mathbf{w}_z^\top) \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^\top (\mathbf{I} - \mathbf{w}_z \mathbf{d}_{n_d}^\top)) s^2. \quad (6.6-17)$$

Die Varianz der Zyklusdifferenzen ergibt sich aus den Wägewerten. Sie ist also messtechnisch bekannt. Bei der Berechnung ist zu beachten, dass der Zyklusmittelwert aus einer gewichteten Mittelwertbildung resultiert (siehe Abschnitt 4.5). Die Spur der dargestellten Matrix kann berechnet werden, denn sowohl die Zyklusmatrix als auch die Gewichtungen sind bekannt. Daher kann die Wägewertvarianz auf dieser Basis geschätzt werden. Dies ist eine Alternative mit geringerer Schätzgenauigkeit zu der Schätzung nach einer der Gleichungen 6.1-5. Für die Schätzung der Varianz der Massedifferenz ergibt sich aus 6.6-2 und 6.6-17

$$V_{(m_p - m_n)A} = \frac{(n_d - 1) \left((\mathbf{X}_0^\top \mathbf{X}_0)_{\mathbf{e}}^{-1} \right)_{22}}{\mathrm{Sp}((\mathbf{I} - \mathbf{d}_{n_d} \mathbf{w}_z^\top) \mathbf{X}_z \mathbf{X}_z^\top (\mathbf{I} - \mathbf{w}_z \mathbf{d}_{n_d}^\top))} s^2(\Delta Y). \quad (6.6-18)$$

Beispiel: Korrelierende Zyklen bei der Einfachsubstitution, zwei Objekte.

Die Tabelle 6.6-1 zeigt das Verhältnis der Varianz $V_{\Delta mA}$ der Massedifferenz zur Varianz $s^2(\Delta Y)$ der Zyklusdifferenzen in Abhängigkeit von der Anzahl n_d der Zyklusdifferenzen. Im Vergleich dazu ist das entsprechende Ergebnis nach M. Gläser wiedergegeben [6], [42]. Die in der Tabelle dargestellten Abweichungen beruhen auf den jetzt nicht mehr gleich verteilten Gewichtungen w_z . Bei $n_d = 2$ liegt noch Gleichgewichtung vor (siehe Abschnitt 4.5). In diesem Falle gibt es volle Übereinstimmung. Bei größerer Anzahl an Zyklusdifferenzen liegen die von M. Gläser errechneten Verhältnisse etwas (aber für die Praxis unbedeutend) höher. Je größer die Anzahl der Zyklusdifferenzen ist, desto geringer sind

¹ Sp bedeutet die Spur einer quadratischen Matrix.

die Abweichungen. Dies liegt daran, dass sich mit zunehmender Anzahl an Zyklusdifferenzen immer mehr eine Gleichverteilung der Gewichtung einstellt.

n_d	w_z	$((\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0)_e^{-1})_{22}$	$V_{\Delta mA} / s^2(\Delta Y)$		
			LD / LDA	Gläser	Abweichung / %
2	1/2	7/8	7/10	7/10	0
3	1/2 5/14 2/7	17/28	34/75	11/24	1,10
4	5/14 3/11 5/22 5/22	41/88	123/364	15/44	0,89
5	3/11 29/131 24/131 25/131 24/131 29/131	99/262	66/245	19/70	0,76

Tab 6.6-1 Varianz der Massedifferenz im Verhältnis zur Varianz der Zyklusdifferenzen

7 Spezielle Anwendungsmöglichkeiten

7.1 Unfreie, nicht verschwindende Driftänderungen

Unfreie Driftänderungen, die durch einen gegebenen, von 0 verschiedenen *Driftänderungsvektor* gekennzeichnet sind, spielen dann eine Rolle, wenn man die *Driftänderungen* durch Messung der Einflussparameter der Wägeeinrichtung bestimmen kann. In diesem Falle wird also angenommen, dass man die Änderungen der *Vorlastwerte* anhand der Einflussparameter berechnen kann. Im Idealfall wird dadurch bei der Massebestimmung eine Eliminierung der *Drift* durch Anwendung eines Driftmodells überflüssig. Zur Behandlung dieser Problemstellung ist es erforderlich, die Reaktion der Wägeeinrichtung auf ihre Einflussparameter zu kennen. Deshalb ist bei jeder Waage im Rahmen getrennter Messungen der Zusammenhang zwischen den Einflussparametern und der *Waagendrift* zu erfassen. Folgende Einflüsse auf die Bauelemente der Wägeeinrichtung sind denkbar:

- Änderungen von Hebellängen, bewirkt durch Temperaturänderungen Δt
- Auftriebsänderungen an den beweglichen Komponenten, bewirkt durch Luftdichteänderungen $\Delta \rho_a$
- Masseänderungen an den Oberflächen beweglicher Komponenten, bewirkt durch Änderungen der relativen Feuchte Δh
- Änderungen an den Charakteristika der elektronischen Bauteile und des Elektromagneten bewirkt durch Temperaturänderungen Δt

Der Luftdruck wirkt sich nur indirekt über die Luftdichte aus. Aus diesem Grund werden als Einflussparameter zweckmäßiger Weise zunächst die Luftdichte ρ_a , die Temperatur t und die relative Luftfeuchte h als unabhängige Parameter bevorzugt. Demnach wird der Vorlastwert als Funktion dieser Parameter dargestellt:

$$m_p = m_p(\rho_a, t, h) \quad (7.1-1)$$

In diesem Abschnitt soll erarbeitet werden, wie man den Zusammenhang zwischen dem sich zeitlich entwickelnden Vorlastwert und den sich gleichzeitig verändernden Einflussparametern ermitteln kann. Zu jedem *Wägewert* benötigt man daher die simultan erfassten Messwerte der Einflussparameter. Entsprechend der vektoriellen Darstellung des Wägewertes und des Vorlastwertes wendet man hier den Luftdichtevektor ρ_a , den Temperaturvektor t und den Relative Feuchtevektor h an. Die Dimension dieser Vektoren ist gleich der Anzahl n_w der *Wägungen*. Zwischen den Vektoren der Vorlastwerte und der Einflussparameter gibt es nach 7.1-1 einen funktionellen Zusammenhang

$$m_p = m_p(\rho_a, t, h). \quad (7.1-2)$$

Für jeden der Luftdichteparameter werden feste Bezugswerte festgelegt. Sie mögen von den Einflussparametern unabhängig sein, so dass sie als zeitlich langsam veränderlich angenommen werden können. Dann läge eine Parameterdrift vor, die zum Beispiel auf eine Drift der Empfindlichkeiten der Parameter – Messgeräte zurückzuführen wäre. Idealerweise können die Bezugswerte aber auch konstant sein. Dann könnten sie zum Beispiel gleich dem Mittelwert der Messwerte der betreffenden Größe gesetzt werden. Zu jedem Parameter gibt es also einen Parameter – Bezugsvektor ρ_{a0} , t_0 , beziehungsweise h_0 . Wenn die Parametervektoren die Werte der Parameter – Bezugsvektoren annehmen, sei der Vorlastwertvektor m_{p0} . Er stellt also den Vorlastwert – Bezugsvektor

$$m_{p0} = m_p(\rho_{a0}, t_0, h_0). \quad (7.1-3)$$

dar.

Da für alle Vektoren die Werte der Komponenten stets nahe beieinander liegen, kann die Abhängigkeit der Vorlastwerte von den Einflussparametern als Taylor-Reihe dargestellt werden. Als Entwicklungspunkte werden die oben definierten Bezugsgrößen verwendet:

$$m_p = m_{p0} + \frac{\partial m_p}{\partial \rho_a}(\rho_a - \rho_{a0}) + \frac{\partial m_p}{\partial t}(t - t_0) + \frac{\partial m_p}{\partial h}(h - h_0) + \dots \quad (7.1-4)$$

Es werden jetzt die charakteristischen Koeffizienten der Wägeeinrichtung einer Komparatorwaage durch die differentiellen Zusammenhänge zwischen dem Vorlastwert und ihren Einflussparametern eingeführt:

$$c_{\rho_a} = \frac{\partial m_p}{\partial \rho_a} \quad \dots \quad \text{Luftdichte-Koeffizient} \quad (7.1-5)$$

$$c_t = \frac{\partial m_p}{\partial t} \quad \dots \quad \text{Temperatur-Koeffizient} \quad (7.1-6)$$

$$c_h = \frac{\partial m_p}{\partial h} \quad \dots \quad \text{Relative Feuchte-Koeffizient} \quad (7.1-7)$$

Da die Terme quadratischer Ordnung und höher vernachlässigbar sein sollen, gilt der lineare Zusammenhang

$$m_p = m_{p0} + c_{\rho_a}(\rho_a - \rho_{a0}) + c_t(t - t_0) + c_h(h - h_0). \quad (7.1-8)$$

Im vorliegenden Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Koeffizienten der Wägeeinrichtung hinreichend bekannt sind. Dann ist es möglich, die Driftänderungen durch Messung der Veränderungen der Vorlastparameter Luftdichte, Temperatur und Relative Feuchte gegenüber ihren Bezugswerten zu bestimmen.¹

Es ist zwischen folgenden Fällen zu unterscheiden:

- a) Das Verfahren ist so genau, dass sich der gesamte Verlauf der Vorlastwerte aus den Werten der Einflussparameter ergibt. In diesem Falle kann die Drift berechnet werden. Ein Verfahren zur Drifteliminierung wird nicht benötigt.
- b) Das Verfahren reicht aus, um anhand der Veränderungen der Einflussparameter den kurzzeitigen Trend der Drift errechnen zu können. Dann verblieben die oben genannten sich langsam verändernden Vorlast-Bezugswerte, die noch zu eliminieren wären.

Der erste Fall (a), der praktisch kaum zu realisieren ist, weil die Messgenauigkeiten nicht ausreichen, ist nicht weiter Gegenstand dieser Arbeit. Der zweite Fall (b) kann jedoch in der Praxis von Bedeutung sein, wenn ausreichend Kenntnis über die Parameter-Koeffizienten vorläge. Aus diesem Grunde wird nur letzterer Fall hier weiter untersucht.

Entsprechend der oben genannten Voraussetzung wird gemäß Gleichung 3.2-7 ein lineares Driftmodell angewandt. Da für den langsam veränderlichen Vorlast - Bezugswert nur unfreie Driftänderungen gleich 0 in Frage kommen, gilt die inhomogene lineare Gleichung

$$X_d m_{p0} = 0. \quad (7.1-9)$$

Da die Parameter - Bezugswerte ebenfalls als langsam veränderlich vorausgesetzt werden, gelten entsprechende Driftgleichungen

$$X_d \rho_{a0} = 0 \quad (7.1-10)$$

$$X_d t_0 = 0 \quad (7.1-11)$$

$$X_d h_0 = 0 \quad (7.1-12)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Drift des Vorlast – Bezugswertes und der Drift der einzelnen Parameter – Bezugswerte herzustellen, wendet man die *Driftmatrix* auf den Vorlastvektor in Gleichung 7.1-8 an. Es ergibt sich

¹ Die Luftdichte kann man durch Messung des Luftdrucks, der Temperatur und der Relativen Feuchte bestimmen, indem man eine der bekannten Bestimmungsgleichungen verwendet [14], [29], [30], [31].

$$\mathbf{X}_d \mathbf{m}_p = c_{\rho_a} \mathbf{X}_d \rho_a + c_t \mathbf{X}_d \mathbf{t} + c_h \mathbf{X}_d \mathbf{h}. \quad (7.1-13)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die Definition des Vektors der Driftänderungen \mathbf{E} (siehe Gleichung 3.2-7). Die Inhomogenität der Driftgleichung 3.2-10 ist somit

$$\mathbf{E} = c_{\rho_a} \mathbf{X}_d \rho_a + c_t \mathbf{X}_d \mathbf{t} + c_h \mathbf{X}_d \mathbf{h}. \quad (7.1-14)$$

Die Lösungsformel des Gesamtsystems der Gleichungen wurde in Abschnitt 5.1 hergeleitet. Der *Wägewertvektor* wurde dort um den Driftänderungsvektor \mathbf{E} und die Masse m_R des Bezugsnormals expandiert:

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{E} \\ m_R \end{bmatrix}. \quad (7.1-15)$$

Der expandierte *Massevektor* enthält nicht nur die Masse- und Vorlastwerte, sondern auch die Lagrange-Multiplikatoren:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m \\ m_p \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (7.1-16)$$

Dann ist die Lösungsgleichung

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{S} \mathbf{Y}_e \quad (7.1-17)$$

mit

$$\mathbf{S} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1} (\mathbf{X}^T)_e \quad (7.1-18)$$

als Lösungsmatrix. Die Berechnung der Lösungsmatrix erfolgt wie in Abschnitt 5.1 mit Hilfe der um die Auftriebsterme korrigierten *Wägematrix* \mathbf{X} , der Expansion der Normalmatrix durch die Matrix der Nebenbedingungen und der passenden Expansion der transponierten Wägematrix.

Der Vektor \mathbf{E} der Driftänderungen ergibt sich aus den Messwerten \mathbf{Y}_x der Einflussparameter x . Da die eingesetzten Messinstrumente aufgrund der hohen Genauigkeitsanforderung in der Regel differentiell arbeiten, gibt es feste Bezugswerte \mathbf{Y}_{x0} . Jeder Parameter - Messwert ist mit einer Messwertabweichung \mathbf{e}_x behaftet. Die zufälligen Abweichungen dieser Messwerte von den Erwartungswerten sollen nicht berücksichtigt werden. Es werden dadurch größere Residuen bei den Wägewerten in Kauf genommen (siehe die Gleichung 6.1-2).¹

¹ Mathematisch gesehen, ist dies nicht ganz korrekt. Eigentlich müsste man den hier festen Driftänderungsvektor um einen Abweichungsvektor ergänzen, die Nebenbedingung Drift normalisieren und auch hier das Prinzip der geringsten Fehlerquadratsumme anwenden. Das Verfahren wäre ähnlich der LDA-Methode nach Abschnitt 1.5.3. Jedoch sind die Messfehler ohnehin sehr klein, so dass die vorgeschlagene Verfahrensweise voll ausreichen dürfte.

7.2 Bestimmung von Komparatorkoeffizienten

7.2.1 Grundlagen

Es wird ein Verfahren vorgestellt, nach dem man die Koeffizienten der Wägeeinrichtung einer Komparatorwaage bestimmen kann. Durch den Gleichungssatz 7.1-5 bis 7.1-7 wurden die Koeffizienten definiert. Ihre Bestimmung erfolgt durch eine möglichst zeitlich ausgedehnte „Registrierung“ der *Vorlastwerte*. Dabei kommt es darauf an, dass der Verlauf der Vorlastwerte möglichst gut dem Erwartungsverlauf angepasst ist. Es wird das *LDA - Verfahren* angewandt, denn es erscheint am besten geeignet, eine gute Abschätzung des Verlaufs der Vorlastwerte zu erreichen. Um möglichst signifikante Zusammenhänge zu erzielen, ist die Messwerterfassung so zu gestalten, dass durch gezieltes Variieren der Einflussgrößen deutlich veränderliche Vorlastwertverläufe erzeugt werden. Unter diesen Voraussetzungen kann man aus den Datensätzen der Einflussgrößen und der Vorlastwerte zum Beispiel mit Hilfe der Methode der linearen Regression die Koeffizienten der Wägeeinrichtung ermitteln. Grundsätzlich hat sich in diesem messtechnischen Vorgehen hier eine neue Situation ergeben. Während man bei der Massebestimmung bemüht war, die Einflussgrößen konstant zu halten, kommt es jetzt darauf an, sie auf möglichst unterschiedliche Werte „einzustellen“. Dies kann mit Hilfe aneinander gereihter Messfolgen geschehen, bei denen die Parameter Temperatur und Relative Feuchte möglichst auf vorgegebenen Niveaus gehalten werden. In der Praxis kann dies durch unterschiedliche Einstellungen der Klimatisierung erreicht werden. Bei jeder Einstellung muss dann der Verlauf der Vorlastwerte bestimmt werden. Da der Luftdruck mit den vorhandenen Mitteln in der Regel nicht gesteuert werden kann, sind Beobachtungsphasen erforderlich, während derer sich der barometrische Druck hinreichend verändert.

Es gibt also eine Vielzahl von Messfolgen bei möglichst unterschiedlichen Niveaus der Einflussgrößen. Jede Messfolge liefert einen Vektor der Vorlastwerte nach den Gleichungen 7.1-16 bis 7.1-18. Für die Ergebnisse aus den Messfolgen gilt stets die Gleichung 7.1-8. Bei der Messwerterfassung ist noch folgendes zu beachten: Wenn man feststellen möchte, wie sich die Vorlastwerte bei Variation der Einflussparameter verändern, müssen die Referenzpunkte der Messgeräte gleich bleiben. Aus demselben Grund darf der Ausgangswert der Vorlastwerte nicht verändert werden. Das bedeutet, dass während der gesamten Messwerterfassungen weder eine Trierung der Komparatorwaage noch eine Nachjustierung der Referenzpunkte der Messgeräte für die Einflussparameter erfolgen darf.¹ Unter dieser Voraussetzung kann man davon ausgehen, dass es feste Referenzpunkte der Messgeräte und einen festen Bezugsvorlastwert gibt. Diese Bezugsgrößen werden zu einer Konstanten c_p zusammengefasst:

$$c_p = m_{p0} - c_{\rho_a} \rho_{a0} - c_t t_0 - c_h h_0. \quad (7.2-1)$$

Unter der Annahme einer linearen Abhängigkeit der Vorlastwerte von den Einflussparametern gilt dann das Gleichungssystem

$$m_p = c_p d_{n_w} + c_{\rho_a} \rho_a + c_t t + c_h h. \quad (7.2-2)$$

Dieses Gleichungssystem stellt den physikalischen Zusammenhang zwischen den Vorlastwerten und den Einflussparametern dar.² Die Vorlastwerte resultieren aus der Anwendung der LDA – Methode. Sie werden wie bisher durch m_p repräsentiert. Die Einflussparameter werden direkt und simultan zusammen mit den *Wägungen* erfasst. Die Messwerte der Parameter (Beobachtungen) seien nun durch Parametersätze in der Form Y_x dargestellt, wobei x jeweils einen der Parameter ρ_a , t oder h bedeutet. Das Gleichungssystem 7.2-2 stellt den Idealfall dar, dass man die Werte der Einflussparameter der Vorlast, also die Bezugsgrößen und die Komparatorkoeffizienten genau kennt. Ferner besagt das Gleichungssystem, dass keine weiteren Einflüsse wirksam sind. Es handelt sich

¹ Falls die Waage dennoch zwischenzeitlich tariert wird, muss die damit eintretende Änderung des Wägewertes mit erfasst werden. In der Auswertung sind die Vorlastwerte dann bei den betroffenen Messfolgen entsprechend zurückzusetzen.

² Es handelt sich im Sinne der Statistik um eine Hypothese, die durch eine Korrelationsanalyse zu bestätigen wäre, bevor das Verfahren der Regression zur Bestimmung der Koeffizienten der Komparator-Wägeeinrichtungen durchgeführt wird [13], [15], [16], [17]. Aufgrund der physikalischen Einsicht hinsichtlich der Wirkung der Einflussparameter auf die Komponenten der Wägeeinrichtung, wird jedoch auf diese Analyse verzichtet.

also um ein Gleichungssystem, das sich auf die Erwartungswerte der beteiligten Größen beschränkt. Tatsächlich gibt es jedoch zufällige Abweichungen von diesen Erwartungswerten. Diese Abweichungen sollen durch einen Vorlast- Abweichungsvektor dargestellt werden.

Der Vorlast- Abweichungsvektor wird wie folgt definiert:

Jeder Parameter- Messwertsatz stelle einen Vorlast- Einflussvektor dar. Er sei durch \mathbf{Y}_p symbolisiert. Der Unterschied zwischen dem Einflussvektor \mathbf{Y}_p und dem Vorlastvektor \mathbf{m}_p sei der Vorlast- Abweichungsvektor \mathbf{e}_p . Zwischen den Vorlastwerten und den Beobachtungen wird daher die folgende Beziehung angesetzt:

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{Y}_p - \langle \mathbf{e}_p \rangle = c_p \mathbf{d}_{n_w} + c_{\rho_a} \mathbf{Y}_{\rho_a} + c_t \mathbf{Y}_t + c_h \mathbf{Y}_h - \langle \mathbf{e}_p \rangle. \quad (7.2-3)$$

Hierbei ist $\langle \mathbf{e}_p \rangle$ der Einflussabweichungsvektor (Residuenvektor), den man nach der Bestimmung der Koeffizienten c_x und der additiven Konstanten c_p , also nach Durchführung des Ausgleichsverfahrens, vorliegen hat.¹

Die obige Gleichung wird in Matrixform zusammengefasst. Dazu definiert man den Koeffizientenvektor

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_p \\ c_{\rho_a} \\ c_t \\ c_h \end{bmatrix}. \quad (7.2-4)$$

Ferner definiert man die um eine erste Spalte erweiterte Matrix der Beobachtungen:

$$\mathbf{M}_Y = [\mathbf{d}_{n_w} \quad \mathbf{Y}_{\rho_a} \quad \mathbf{Y}_t \quad \mathbf{Y}_h] \quad (7.2-5)$$

Wenn Messfolgen jeweils von einem Umfang n_{w0} insgesamt ν mal erfasst werden, ist

$$n_w = \nu n_{w0} \quad (7.2-6)$$

die Anzahl der Zeilen der Beobachtungsmatrix. Ihre erste Spalte enthält nur Elemente 1, die übrigen Spalten enthalten die Beobachtungen \mathbf{Y}_x . In Matrixform stellt sich 7.2-3 nun als

$$\mathbf{M}_Y \mathbf{c} = \mathbf{m}_p - \langle \mathbf{e}_p \rangle \quad (7.2-7)$$

dar. Dies ist das Gleichungssystem zur Bestimmung der Komparatorkoeffizienten.

Zur Auflösung des Gleichungssystems der Komparatorkoeffizienten bringt man es in die Normalform. Da die Methode der geringsten Quadrate zur Anwendung kommt, entfällt der Vorlast- Abweichungsvektor [9], [11], [15]. Nach Invertierung der Normalmatrix erhält man schließlich für die Koeffizienten der Komparatorwaage die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}_Y \mathbf{Y}_p \quad (7.2-8)$$

mit der Lösungsmatrix

$$\mathbf{S}_Y = (\mathbf{M}_Y^T \mathbf{M}_Y)^{-1} \mathbf{M}_Y^T. \quad (7.2-9)$$

¹ In diesem Ansatz wird davon ausgegangen, dass die Einflussabweichungen zufällig sind. Sie sind nicht zu verwechseln mit den Varianzen und Kovarianzen der Vorlastwerte. Letztere werden im Rahmen einer Unsicherheitsabschätzung gesondert zu berücksichtigen sein (siehe Abschnitt 1.6).

7.2.2 Hinweise zum Verfahren

Wenn man die Komparatorkoeffizienten ermitteln möchte, kommt es nicht darauf an, Massen zu bestimmen. Aus diesem Grunde kann man sich auf ein einziges Prüfgewicht beschränken. Sein genauer Massewert braucht nicht bekannt zu sein. Hinsichtlich der Dichte wird nur der ungefähre Wert benötigt, damit der Auftrieb am Objekt eliminiert werden kann. Die Waage wird in diesem Falle also nur mit einem Prüfobjekt belastet. Es ist ferner nicht erforderlich, zu jeder Messung einen Belastungswechsel durchzuführen. Der Lastaufnehmer der Komparatorwaage wird also mit dem Prüfgewicht über eine längere Zeitspanne durchgehend bestückt, während in bestimmten Zeitabständen die Wägewerte und die Klimadaten erfasst werden.

Es stellt sich jetzt die Frage nach dem mathematischen Verfahren, wie im Falle einer einzigen Prüflast die Vorlastwerte \mathbf{Y}_p zu bestimmen sind. Die in Abschnitt 2.2 definierte Schemamatrix \mathbf{X}_w besteht hier nur noch aus einer einzigen Spalte mit allen Elementen gleich 1. Die erweiterte Wägematrix \mathbf{X} enthält die zugehörigen Auftriebsterme bestehend aus der Luftdichte und der Materialdichte des Prüfgewichts. Der Massevektor enthält in der ersten Position als Approximation für die Masse den nominalen Massewert m_n des Prüfgewichts und in den übrigen Positionen die Vorlastwerte \mathbf{m}_p (siehe Gleichung 2.2-8). Den nominalen Massewert findet man dann im erweiterten Wägewertvektor in der letzten Position wieder (siehe 5.3-24).

Zur Bestimmung der Lösungsmatrix sind die Driftgleichungen aufzustellen. Im Falle aneinander gereihter Messfolgen müssen die Wägewerte bei aufliegendem Prüfgewicht in gleichen Zeitabständen ermittelt werden. Je Folge gibt es sinnvoller Weise einen durchgehenden *Beobachtungszeitraum*. Die Unterbrechung von Folge zu Folge kann aus dem Grunde notwendig sein, weil die Veränderungen der Parameter wie zum Beispiel des barometrischen Drucks unterschiedlich lange Zeit in Anspruch nehmen kann. Je Beobachtungszeitraum liegt dann ein Driftmodell in Form von Teilmatrizen \mathbf{X}_d nach Gleichung 3.2-8 vor. Die Teilmatrizen bilden die Driftmatrix in der Form

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \vdots & \mathbf{X}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_d & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (7.2-10)$$

Die Lösungen der Vorlastwerte ergeben sich aus den Zeilen 2 bis $n_w + 1$ der Lösungsmatrix \mathbf{S} (siehe Abschnitt 5.3, insbesondere Einzelheiten zur Gleichung 5.3-30):

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m_n \\ \mathbf{Y}_p \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.2-11a)$$

$$= \mathbf{S} \mathbf{Y}_e \quad (7.2-11b)$$

8 Anwendungsbeispiel: Untersuchung von Wägeereignissen

8.1 Aufgabenstellung und Methode

Im Falle hochgenauer Substitutionswägungen werden zur Verbesserung der Standardabweichung häufig automatische Lastwechselvorrichtungen eingesetzt, die den Wechsel zwischen Normal und Prüfling auf dem Lastaufnehmer vollautomatisch durchführen. Im Vergleich zur manuellen Beschickung der Waage wird die Wiederholbarkeit durch die Automatisierung des Lastwechsels aus folgenden Gründen verbessert:

- Eine bessere Positionierung verringert Wägewertabweichungen, die durch außermittige Krafteinleitung in die Messzelle der Waage entstehen.
- Gleichartiges und gleichmäßiges Be- und Entlasten des Lastaufnehmers bewirken in der Messzelle physikalisch gleiche und ungestörte Regelungsabläufe.
- Gleichartigkeit der zeitlichen Abläufe im Lastwechsel- und Wägeprozess einer *Wägereihe* reduzieren den Einfluss der *Waagendrift*.
- Durch Automatisierung entfallen von Menschen verursachte Schwankungen der Einflussparameter Temperatur, Relative Feuchte und Druck.

Eine verbesserte Wiederholbarkeit der *Wägungen* durch den Einsatz von automatischen Lastwechslern erleichtert das Auffinden systematischer Wägewertabweichungen, die man bei manueller Beschickung nicht hätte feststellen können. Andererseits muss in Betracht gezogen werden, dass automatische Lastwechselvorrichtungen zwar geringe Standardabweichungen ermöglichen, dass sie aber auch die Ursache weiterer systematischer Abweichungen der *Wägewerte* sein können. Zum Beispiel ist es denkbar, dass wiederkehrende Positionierabweichungen regelmäßig wiederkehrende Wägewertverschiebungen nach sich ziehen. Bei den herkömmlichen Methoden der *Einfach-* oder *Doppelsubstitution* konnten im Allgemeinen derartige Verschiebungen nicht dargestellt werden. Dies liegt darin begründet, dass nicht auf der Ebene der elementaren *Wägegleichung* 2.1-7, sondern auf der Ebene von *Zyklusdifferenzen* gearbeitet wurde. Mit den in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren ist es nun jedoch auch möglich, auf der Basis der elementaren Wägegleichung und mit Hilfe statistischer Methoden wiederkehrende systematische Einflüsse auf die Wägewerte festzustellen .

Als Beispiel wurde ein Wägereihe ausgewählt, die bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt mit Hilfe einer Komparatorwaage mit automatischer Lastwechselvorrichtung an zwei 20 g Massennormalen aus Edelstahl aufgenommen wurde. Die Lastwechselvorrichtung arbeitet nach dem Prinzip der Doppelsubstitution. Die Auswertung dieser Daten soll hier auf der Basis des *LDA – Verfahrens* erfolgen. Die Untersuchung soll folgende Fragestellungen umfassen:

1. Vergleich der Standardabweichungen, die mit Hilfe der LDA – Methode einerseits und konventionell über Zyklusdifferenzen andererseits bestimmt werden.
2. Bestimmung und grafische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der *Vorlastwerte*.
3. Feststellen systematischer Wägewertverschiebungen, falls diese signifikant sind. Gegebenenfalls Wägewertkorrekturen.

Aufgrund der großen Datenmenge von 760 Wäge- und zugehörigen Klimawerten hätte man bei der Durchführung der LDA – Methode Matrizen sehr großer Dimension zu berechnen. Aus diesem Grunde wird die Gesamtwägereihe in eine Serie von 38 Abschnitten zu je 20 Wägewerten unterteilt, für die dann die erweiterten Massevektoren mit den Vorlastwerten jeweils berechnet werden. Mit Hilfe der so best geschätzten Masse- und Vorlastwerte sind dann die justierten Wägewerte und die Residuen zu berechnen. Je Serienabschnitt erhält man aus den Residuen eine Schätzung der Standardabweichung, die über die gesamte Serie zu mitteln ist. Im Vergleich dazu werden die Zyklusdifferenzen der Doppelsubstitution gebildet und deren Standardabweichung berechnet. Von den Residuen nach der LDA – Methode ist zu erwarten, dass sie normalverteilt sind. Das lässt sich bei dem gegebenen Stichprobenumfang am Einfachsten anhand der Häufigkeitsverteilung bereits gut beurteilen. Wenn sich zum Beispiel eine Überlagerung mehrerer Häufigkeitsverteilungen ergibt, würden die Wägewerte nicht der gleichen Grundgesamtheit entstammen. In diesem Falle lägen systematisch wiederkehrende Wägewertverschiebungen vor. Diese wären dann, wenn möglich, zu deuten.

8.2 Messungen und Auswertung

Die *Wägewerte* und die Messdaten des Luftdrucks, der Temperatur und der Relativen Feuchte wurden in einer durchgehenden Messreihe aufgenommen. Der Lastwechsel erfolgte automatisch nach dem Verfahren der *Doppelsubstitution*. Die zeitliche Entwicklung der Wägewerte ist in der Abbildung 8.2-1 wiedergegeben. Aufgrund des Masseunterschiedes zwischen den beiden Objekten liegen zwei parallel verlaufende Kurvenzüge vor. Die zugehörigen Daten, sowie die Klimadaten sind beim Autor niedergelegt und können erfragt werden.

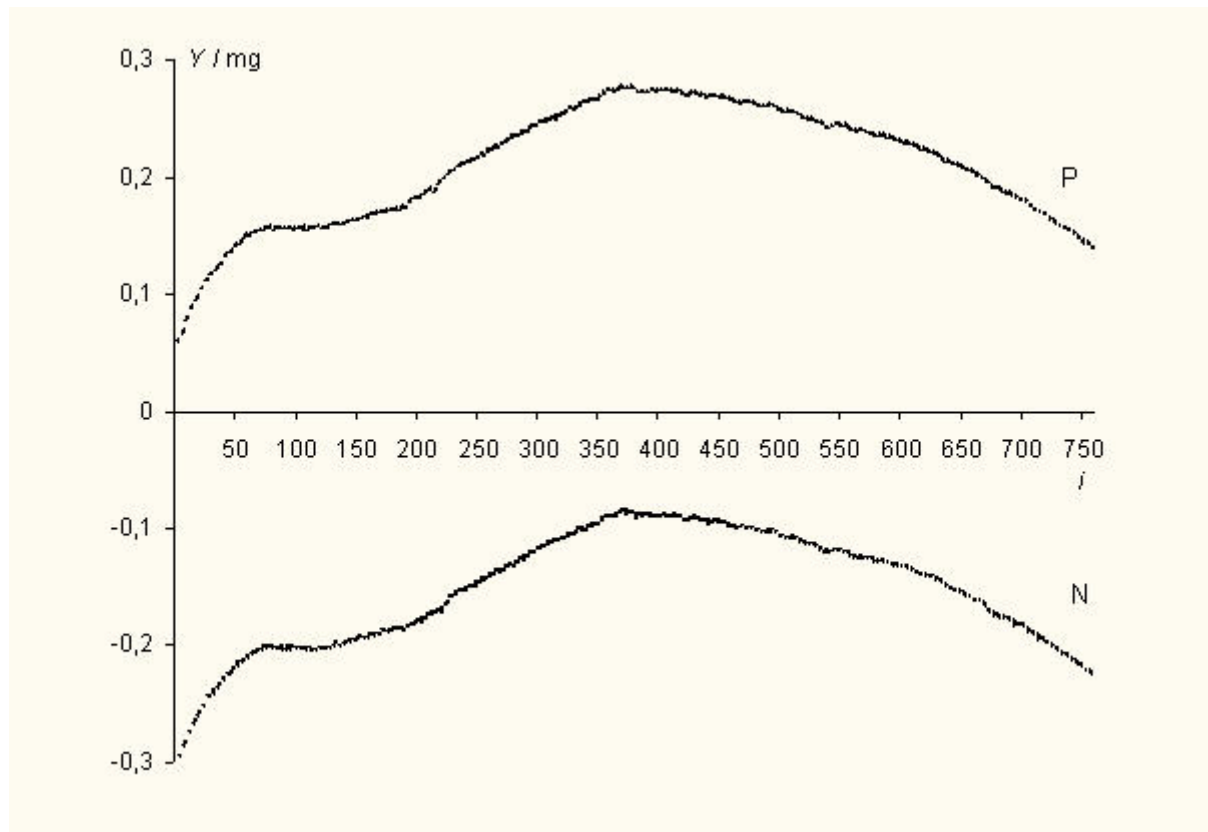


Abb. 8.2-1: Wägewerte für Normal und Prüfling

Die Messergebnisse werden jetzt unter Verwendung der in dieser Arbeit geschaffenen Grundlagen analysiert.

Die Schätzung der Standardabweichung in jeder Serie erfolgt nach den Gleichungen 6.1-5 und 6.2-1. Zur Berechnung des statistischen *Freiheitsgrades* liegen somit folgende Daten vor:

Anzahl der Wägewerte je Serie:	n	20
Anzahl der Driftnebenbedingungen (siehe Abb. 5.5-2):	$n_d = n - 2$	18
Anzahl der Objekte :	n_o	2
Freiheitsgrad:	f	17

Der Serien-Mittelwert s der Standardabweichungen s_j für $1 \leq i \leq 38$ wird nach Gleichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{38} s_j^2}{38}} \quad (8.2-1)$$

berechnet.

Zur Bestimmung der empirischen Standardabweichung der *Zyklusdifferenzen* wird von Gleichung 4.3-2 ausgegangen. Es wird also die Standardabweichung $s(\Delta Y)$ der ΔY_k berechnet. Es sei bereits angemerkt, dass die Auswertung in einem weiteren Durchgang wiederholt wird, nachdem man die Wägewerte auf bestimmte Art und Weise korrigiert hat (siehe Gleichung 8.2-2). Zunächst jedoch wird von den unkorrigierten Wägewerten ausgegangen. Es ergeben sich die folgenden Standardabweichungen:

Standardabweichung nach dem LDA - Verfahren:	s	1,80 μg
Standardabweichung der Zyklusdifferenzen:	$s(\Delta Y)$	2,14 μg

Entgegen den ersten Erwartungen fällt die Standardabweichung bei Anwendung der LDA – Methode hier nicht wesentlich geringer aus als bei Verwendung der klassischen Zyklusdifferenzen.

Dieses zunächst überraschende Ergebnis erfordert eine nähere Untersuchung. Dazu wird die Häufigkeitsverteilung der errechneten Residuen dargestellt. Dies zeigt die Abbildung 8.2-2. Offenbar überlagern sich im Wesentlichen zwei Normalverteilungen. Zusätzlich gibt es noch eine feinere Aufspaltung dieser beiden Verteilungen. Dies lässt auf weitere systematische Einflüsse schließen. Hierauf soll allerdings in diesem Rahmen nicht eingegangen werden.

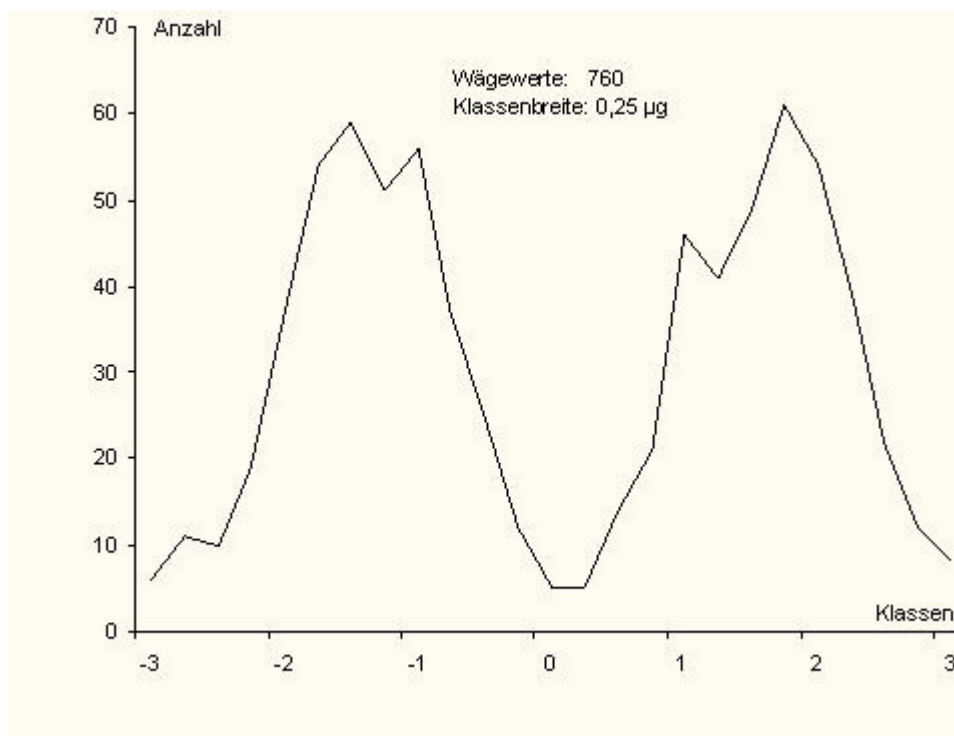


Abb. 8.2-2: Häufigkeitsverteilung im Falle der unkorrigierten Wägewerte auf der Basis von 760 Messpunkten

Im Rahmen einer ersten Analyse muss man also zunächst von der Existenz mindestens zweier Grundgesamtheiten ausgehen. Damit ist eine grundlegende Voraussetzung der Statistik für die Akzeptanz der Messergebnisse an dieser Stelle nicht erfüllt. Die Wägewerte sind also in dieser Form nicht verwendbar.

Um doch noch zu einer Lösung zu gelangen, kann man nach einer Korrektur der Messwerte suchen. Dazu ist ein plausibles Lösungsmodell erforderlich. Nach Abbildung 8.2-2 tragen etwa gleich viele Wägewerte zu den Residuen auf der linken wie auf der rechten Seite der Verteilung bei. Es stellt sich die Frage, ob es eine Gesetzmäßigkeit der Zuordnung nach links und nach rechts gibt. Dazu gibt es folgende Hypothesen:

- Beim automatischen Lastwechsel sind die Zeitspannen beim Wechsel von N auf P beziehungsweise von P auf N und bei der erneuten Auflage derselben Last, entsprechend dem Vorgang von N auf N beziehungsweise von P auf P, unterschiedlich. Infolge der Wägewerdrift müssten also systematische Verschiebungen der Wägewerte in Betracht gezogen werden.

- Die Positionierung beim Wechsel von N auf P und von P auf N ist unterschiedlich von der Positionierung bei erneuter Auflage desselben Objekts. Dies führt zu einer sprunghaften Überlagerung der Wägewerte nach oben oder nach unten, je nachdem, ob ein Objektwechsel stattfindet oder nicht. Dieser Effekt liegt in der Abweichung von Wägewerten bei exzentrischer Belastung begründet. Er ist von zeitlichen Änderungen der Wägewerte unabhängig.

Die erste Hypothese besagt, dass die Richtung und Stärke der Verschiebung der Wägewerte von ihrem zeitlichen Verlauf abhängen müsste. Je stärker sich die Wägewerte zeitlich ändern, desto größer müsste die Verschiebung sein. Nach Abbildung 8.2-1 liegt ein allmählicher Übergang von einem zu Beginn stärker ansteigenden zu einem am Ende stärker abfallenden Verlauf vor. Eine einseitige Häufung von Wägewertverschiebungen kommt daher nicht in Frage. Aus diesem Grunde ist die erste Hypothese zu verwerfen. Es verbleibt die zweite Hypothese. Man geht dort von der Annahme aus, dass sich die Wägewerte beim Lastwechsel von N auf P beziehungsweise von P auf N um einen bestimmten Betrag Δ zusätzlich verschieben. Ausgehend von Gleichung 4.3-2 bedeutet dies, dass jedem Wägewert bei einem geraden Zähler ein Korrekturbetrag Δ hinzugefügt wird. Bemerkenswert ist in diesem Beispiel, dass diese Korrektur keinen Einfluss auf die Zyklusdifferenzen hat:

$$\Delta Y_k = \frac{1}{2}(Y_{4k-2} + \Delta + Y_{4k-1}) - \frac{1}{2}(Y_{4k-3} + Y_{4k} + \Delta). \quad (8.2-2)$$

Jedoch würden sich bei Einsatz desselben Messsystems und einer anderen Zyklusstruktur systematische Abweichungen bei der Masse des zu kalibrierenden Objektes ergeben. Im vorliegenden Fall der Doppelsubstitution liegt aber eine Kompensation von Δ vor. Die beabsichtigte Korrektur würde daher die Standardabweichung der Zyklusdifferenzen nicht verändern.

Zur Durchführung der Korrektur werden die Häufigkeitsverteilungen entsprechend den geraden und den ungeraden Zählern dargestellt. Die Abbildung 8.2-3 zeigt die beiden Grundgesamtheiten

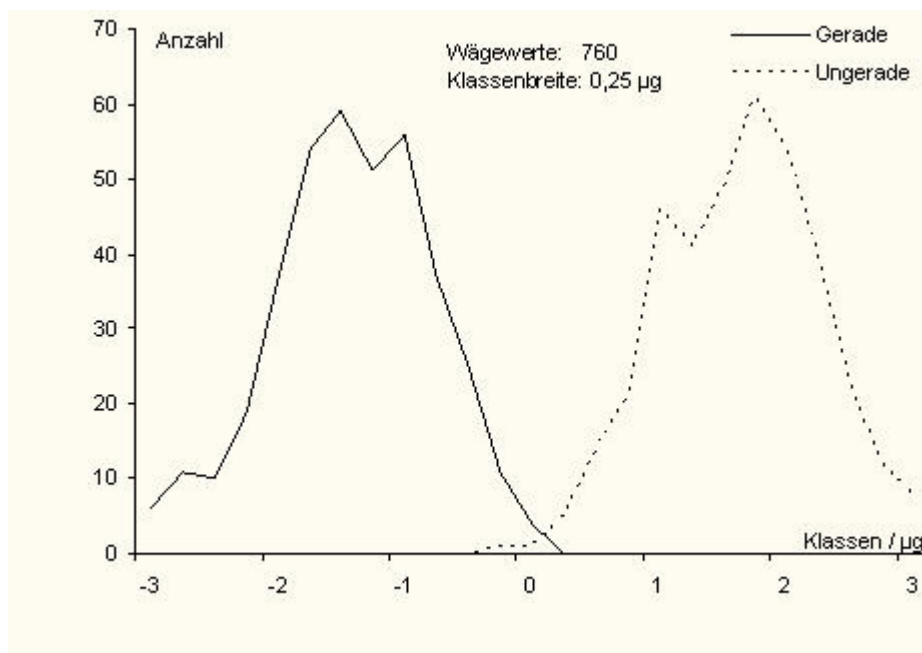


Abb. 8.2-3: Häufigkeitsverteilungen getrennt nach gerader und ungerader Wägewertnummer, vor der Korrektur

Die Darstellung ist deckungsgleich mit der Häufigkeitsverteilung nach Abbildung 8.2-2.

Wenn man nun Δ solange verändert, bis die Mittelwerte der Residuen aus den beiden Grundgesamtheiten bei 0 liegen, kann man von einer gemeinsamen Grundgesamtheit ausgehen. Als Ansatz wird nun der Unterschied $\Delta\langle e \rangle$ zwischen den Mittelwerten aus den beiden Grundgesamtheiten im unkorrigierten Fall berechnet und dann als erste Schätzung für Δ verwendet (erste Stufe einer Iteration). Nach erfolgter Korrektur ergeben sich neue Mittelwerte für die Residuen, die sich aber

deutlich weniger voneinander unterscheiden (zweite Iterationsstufe). Die Summe der Mittelwertunterschiede aus diesen beiden Stufen wird als jetzt verbesserte Schätzung für Δ verwendet. Nach Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich für Δ eine rasch konvergierende Folge. Sie kann nach der dritten Stufe beendet werden:

Iterationsstufe	$\Delta\langle e \rangle / \mu\text{g}$
1	3,063086
2	0,292089
3	0,027853
Gesamt	3,383027

Somit wird $\Delta = 3,383027 \mu\text{g}$ gesetzt. Mit dieser Korrektur der Wägewerte ergeben sich die in Abbildung 8.3-4 dargestellten Häufigkeitsverteilungen.

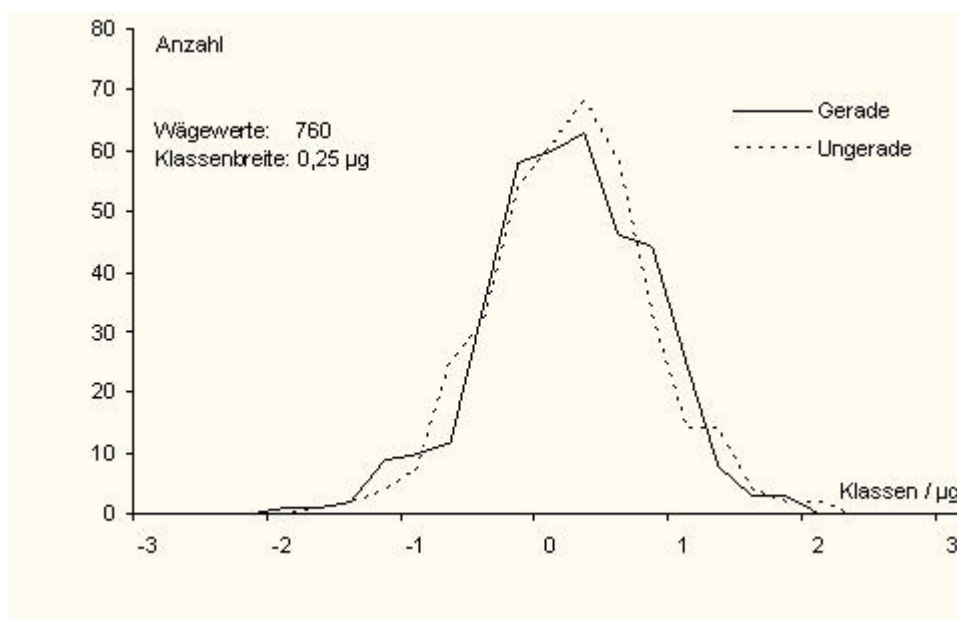


Abb. 8.2-4: : Häufigkeitsverteilungen getrennt nach gerader und ungerader Wägewertnummer, nach der Korrektur

Bis auf geringfügige Abweichungen sind die Häufigkeitsverteilungen nach Abbildung 8.2-4 deckungsgleich. Es kann jetzt also angenommen werden, dass die Fälle „Gerade“ und „Ungerade“ der gleichen Grundgesamtheit entstammen.¹ Damit ist die Hypothese bestätigt, dass beim Wechsel von P auf N und von N auf P eine systematische Verschiebung der Wägewerte stattfindet. Offenbar handelt es sich um ein charakteristisches Verhalten des bei den Messungen eingesetzten Lastwechslers.

Nach Durchführung der Wägewertkorrektur ergeben sich für die Standardabweichung folgende Werte:

Standardabweichung nach dem LDA - Verfahren:	s	0,65 μg
Standardabweichung der Zyklusdifferenzen:	$s(\Delta Y)$	2,14 μg

Diese jetzt deutlich verbesserte Standardabweichung ist auf die Anwendung der LDA - Methode zurückzuführen. Dabei waren die Berücksichtigung der *Waagendrift* im Rahmen angepasster Vorlastwertverläufe und die Anwendung des Prinzips der geringsten Wägewertabweichungen die entscheidenden Beiträge.

¹ Eine weitergehende statistische Analyse könnte mit Hilfe eines F-Test durchgeführt werden. Die Ergebnisse sind jedoch offensichtlich, so dass an dieser Stelle auf eine weitere Ausführung verzichtet wurde. In beiden Zweigen in Abbildung 8.2-3 sind noch weitere Einbrüche zu sehen. In Abbildung 8.2-4 werden sie aufgrund der Wahl der Klassenbreite von 0,25 μg lediglich unterdrückt. Da die Ursache für die Einbrüche weniger signifikant erscheint, wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine weitere Untersuchung verzichtet.

In Abbildung 8.2-5 ist der Verlauf der Wäge- und Vorlastwerte für N und P bei einer der Messserien dargestellt.

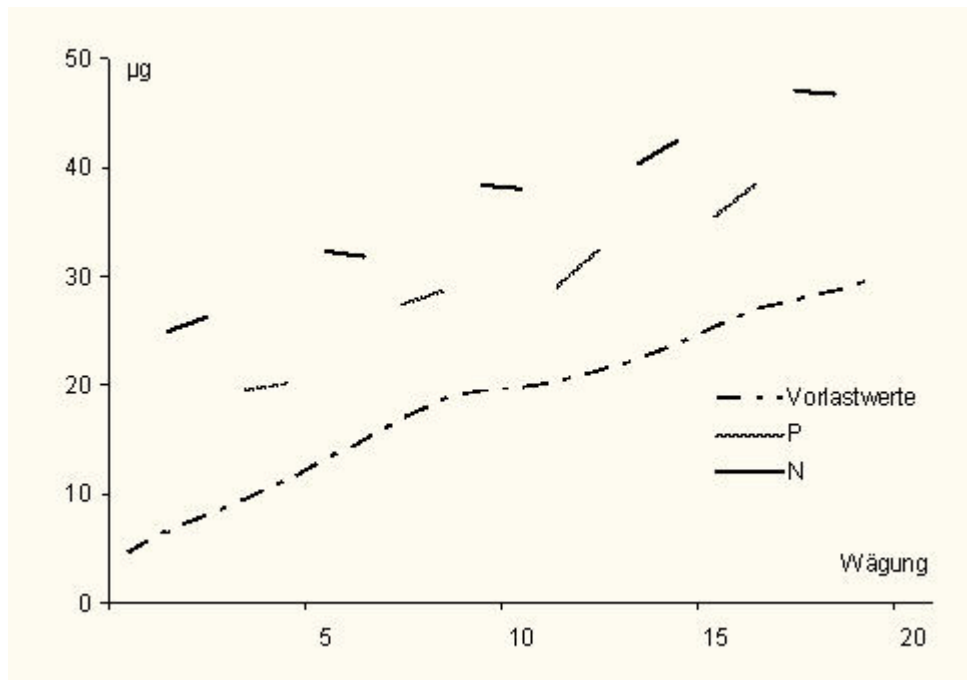


Abb. 8.2-5: Verlauf der Wäge- und Vorlastwerte als Beispiel (bis auf additive Konstanten)

Die Abbildung zeigt sehr deutlich, wie sich die Vorlastwerte in angepasster Form mit den Wägewerten weiterentwickeln. Dabei werden die zufälligen Schwankungen der Wägewerte bei den Vorlastwerten unterdrückt.

9 Anhang

9.1 Beispiele zu den unfreien, verschwindenden Driftänderungen

9.1.1 Einfachsubstitution, durchgängige Driftkonstanz bei 2 Objekten

9.1.1.1 3 Wägewerte, Wägeschema N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 0

Erweiterte Wägematrix

\mathbf{x}		j		i		
		1	2	1	2	3
i	1	1	0	1	0	0
	2	0	1	0	1	0
	3	1	0	0	0	1

Inverse Normalmatrix

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	3/2	-1/2	-1/2	-1/2	1/2	1
3	0	-1/2	1	1/2	0	0	-1
4	0	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	-1
5	0	-1/2	0	1/2	1	0	-1
6	0	1/2	0	-1/2	0	0	0
7	1	1	-1	-1	-1	0	0

Transponiert, erweitert, expandiert

\mathbf{X}_e^T		1 2 3 4 5					
		\mathbf{X}^T					
		i					
		1 2 3					
1	j	1	1	0	1	0	0
2		2	0	1	0	0	0
3	i	1	1	0	0	0	0
4		2	0	1	0	0	0
5		3	0	0	1	0	0
6	\mathbf{X}^T		0	0	0	1	0
7			0	0	0	0	1

Lösungsmatrix

\mathbf{S}	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	1
2	-1/2	1	-1/2	1/2	1
3	1	0	0	0	-1
4	1/2	0	1/2	-1/2	-1
5	0	0	1	0	-1
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e$			1 2 3 4 5 6 7										
			$\mathbf{X}^T \mathbf{X}$								\mathbf{D}^T		\mathbf{x}_1^T
			j		i						k		
			1 2		1 2 3						1		
1	$\mathbf{X}^T \mathbf{X}$	j	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	
2			2	0	1	0	1	0	0	0	0		
3		i	1	1	0	1	0	0	1	1	0		
4			2	0	1	0	1	0	-2	0			
5			3	1	0	0	0	1	1	0			
6	\mathbf{D}	k	-										
7			\mathbf{x}_1	1	0	0	0	0	0	0	0		

9.1.1.2 5 Wägewerte, Wägeschema N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 2

Erweiterte Wägematrix

x		j		i				
		1	2	1	2	3	4	5
i	1	1	0	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0
	3	1	0	0	0	1	0	0
	4	0	1	0	0	0	1	0
	5	1	0	0	0	0	0	1

Transponiert, erweitert, expandiert

\mathbf{x}_e^T															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9				
			\mathbf{x}^T												
			i												
1	j	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0				
		2	0	1	0	1	0	0	0	0	0				
		i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0			
			2	0	1	0	0	0	0	0	0	0			
			3	0	0	1	0	0	0	0	0	0			
\mathbf{x}^T	j	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0				
		5	0	0	0	0	1	0	0	0	0				
		6	0	0	0	0	0	1	0	0	0				
		7	0	0	0	0	0	0	1	0	0				
		8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			
		9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0			
		10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
		11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		

Expandierte Normalmatrix

$(X^T X)_e$														
			$X^T X$							D^T			x_1^T	
			j		i					k				
			1	2	1	2	3	4	5	1	2	3		
1	$X^T X$	j	1	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
2		2	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	
3		i	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4		2	0	1	0	1	0	0	0	-2	1	0	0	
5		3	1	0	0	0	1	0	0	1	-2	1	0	
6	D		4	0	1	0	0	0	1	0	0	1	-2	0
7		5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
8		k	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
9		2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	
10		3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	
11	x_1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Inverse Normalmatrix

$(x^T x)_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	5/6	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/6	1/3	1
3	0	-1/3	11/15	8/15	1/3	2/15	-1/15	4/15	1/3	1/15	-1
4	0	-1/3	8/15	13/30	1/3	7/30	2/15	-8/15	-1/6	-2/15	-1
5	0	-1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	-1
6	0	-1/3	2/15	7/30	1/3	13/30	8/15	-2/15	-1/6	-8/15	-1
7	0	-1/3	-1/15	2/15	1/3	8/15	11/15	1/15	1/3	4/15	-1
8	0	1/3	4/15	-8/15	-1/3	-2/15	1/15	-4/15	-1/3	-1/15	0
9	0	1/6	1/3	-1/6	-2/3	-1/6	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	0
10	0	1/3	1/15	-2/15	-1/3	-8/15	4/15	-1/15	-1/3	-4/15	0
11	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-1/3	1/2	-1/3	1/2	-1/3	1/3	1/6	1/3	1
3	11/15	1/5	1/3	-1/5	-1/15	4/15	1/3	1/15	-1
4	8/15	1/10	1/3	-1/10	2/15	-8/15	-1/6	-2/15	-1
5	1/3	0	1/3	0	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	-1
6	2/15	-1/10	1/3	1/10	8/15	-2/15	-1/6	-8/15	-1
7	-1/15	-1/5	1/3	1/5	11/15	1/15	1/3	4/15	-1
8	4/15	-1/5	-1/3	1/5	1/15	-4/15	-1/3	-1/15	0
9	1/3	0	-2/3	0	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	0
10	1/15	1/5	-1/3	-1/5	4/15	-1/15	-1/3	-4/15	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.1.3 7 Wägewerte, Wägeschema N P N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 2

Transponierte erweiterte Wägematrix und Expansion

Expandierte Normalmatrix

Erweiterte Wägematrix

x	j		i						
	1	2	1	2	3	4	5	6	7
i 1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	1

\mathbf{x}_e^T			\mathbf{x}^T															
			i															
			1	2	3	4	5	6	7									
1	j	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
2		2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4		2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	\mathbf{x}^T	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
6		4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
7		5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
8		6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
9		7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
10				0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
11			0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
12				0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
13			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		
14				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
15			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		

$(\mathbf{x}^T \mathbf{x})_e$			$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$										\mathbf{D}^T					\mathbf{x}_1^T
			j	i								k						
		1	2	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5			
1	$\mathbf{x}_T \mathbf{x}$	j	1	4	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1		
2		2	0	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0		
3		i	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
4			2	0	1	0	1	0	0	0	0	-2	1	0	0	0		
5		3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0		
6		4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-2	1	0		
7		5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-2	1		
8		6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-2		
9		7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1		
10	\mathbf{D}	k	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
11		2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
12		3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0		
13		4	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0		
14		5	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0		
15	\mathbf{x}_1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Inverse Normalmatrix

$(x^T x)_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	7/12	-1/4	-1/4	-1/4	-1/4	-1/4	-1/4	-1/4	1/4	1/6	1/3	1/6	1/4	1
3	0	-1/4	4/7	13/28	5/14	1/4	1/7	1/28	-1/14	3/7	9/14	1/2	5/14	1/14	-1
4	0	-1/4	13/28	11/28	9/28	1/4	5/28	3/28	1/28	-13/28	-1/14	0/1	1/14	-1/28	-1
5	0	-1/4	5/14	9/28	2/7	1/4	3/14	5/28	1/7	-5/14	-11/14	-1/2	-3/14	-1/7	-1
6	0	-1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	-1/4	-1/2	-1	-1/2	-1/4	-1
7	0	-1/4	1/7	5/28	3/14	1/4	2/7	9/28	5/14	-1/7	-3/14	-1/2	-11/14	-5/14	-1
8	0	-1/4	1/28	3/28	5/28	1/4	9/28	11/28	13/28	-1/28	1/14	0	-1/14	-13/28	-1
9	0	-1/4	-1/14	1/28	1/7	1/4	5/14	13/28	4/7	1/14	5/14	1/2	9/14	3/7	-1
10	0	1/4	3/7	-13/28	-5/14	-1/4	-1/7	-1/28	1/14	-3/7	-9/14	-1/2	-5/14	-1/14	0
11	0	1/6	9/14	-1/14	-11/14	-1/2	-3/14	1/14	5/14	-9/14	-29/21	-4/3	-20/21	-5/14	0
12	0	1/3	1/2	0	-1/2	-1	-1/2	0	1/2	-1/2	-4/3	-5/3	-4/3	-1/2	0
13	0	1/6	5/14	1/14	-3/14	-1/2	-11/14	-1/14	9/14	-5/14	-20/21	-4/3	-29/21	-9/14	0
14	0	1/4	1/14	-1/28	-1/7	-1/4	-5/14	-13/28	3/7	-1/14	-5/14	-1/2	-9/14	-3/7	0
15	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-1/4	1/3	-1/4	1/3	-1/4	1/3	-1/4	1/4	1/6	1/3	1/6	1/4	1
3	4/7	3/14	5/14	0	1/7	-3/14	-1/14	3/7	9/14	1/2	5/14	1/14	-1
4	13/28	1/7	9/28	0	5/28	-1/7	1/28	-13/28	-1/14	0	1/14	-1/28	-1
5	5/14	1/14	2/7	0	3/14	-1/14	1/7	-5/14	-11/14	-1/2	-3/14	-1/7	-1
6	1/4	0	1/4	0	1/4	0	1/4	-1/4	-1/2	-1	-1/2	-1/4	-1
7	1/7	-1/14	3/14	0	2/7	1/14	5/14	-1/7	-3/14	-1/2	-11/14	-5/14	-1
8	1/28	-1/7	5/28	0	9/28	1/7	13/28	-1/28	1/14	0	-1/14	-13/28	-1
9	-1/14	-3/14	1/7	0	5/14	3/14	4/7	1/14	5/14	1/2	9/14	3/7	-1
10	3/7	-3/14	-5/14	0	-1/7	3/14	1/14	-3/7	-9/14	-1/2	-5/14	-1/14	0
11	9/14	2/21	-11/14	-1/3	-3/14	5/21	5/14	-9/14	-29/21	-4/3	-20/21	-5/14	0
12	1/2	1/3	-1/2	-2/3	-1/2	1/3	1/2	-1/2	-4/3	-5/3	-4/3	-1/2	0
13	5/14	5/21	-3/14	-1/3	-11/14	2/21	9/14	-5/14	-20/21	-4/3	-29/21	-9/14	0
14	1/14	3/14	-1/7	0	-5/14	-3/14	3/7	-1/14	-5/14	-1/2	-9/14	-3/7	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.1.4 4 Wägewerte, Wägeschema N P N P, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 1 Transponiert, erweitert, expandiert

Erweiterte Wägematrix

x	j		i			
	1	2	1	2	3	4
i	1	1	0	1	0	0
	2	0	1	0	1	0
	3	1	0	0	0	1
	4	0	1	0	0	1

\mathbf{x}_e^T			\mathbf{x}^T							
			1	2	3	4	5	6	7	
			i	1	2	3	4			
1	\mathbf{x}^T	j	1	1	0	1	0	0	0	0
2			2	0	1	0	1	0	0	0
3		i	1	1	0	0	0	0	0	0
4			2	0	1	0	0	0	0	0
5			3	0	0	1	0	0	0	0
6			4	0	0	0	1	0	0	0
7			0	0	0	0	1	0	0	
8			0	0	0	0	0	1	0	
9			0	0	0	0	0	0	1	

Expandierte Normalmatrix

$(x^T x)_e$			1	2	3	4	5	6	7	8	9
			$x^T x$				D^T		x_1^T		
			j	i				k			
			1	2	1	2	3	4	1	2	
1	j	1	2	0	1	0	1	0	0	0	1
2		2	0	2	0	1	0	1	0	0	0
3	i	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
4		2	0	1	0	1	0	0	-2	1	0
5		3	1	0	0	0	1	0	1	-2	0
6		4	0	1	0	0	0	1	0	1	0
7	D	k	1	0	0	1	-2	1	0	0	0
8		2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
9	x_1		1	0	0	0	0	0	0	0	0

Inverse Normalmatrix

$(x^T x)_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	5/4	-1/4	-1/2	-3/4	-1	1/4	-1/4	1
3	0	-1/4	3/4	1/2	1/4	0/1	1/4	1/4	-1
4	0	-1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	0	-1
5	0	-3/4	1/4	1/2	3/4	1/1	-1/4	-1/4	-1
6	0	-1	0	1/2	1	3/2	0	1/2	-1
7	0	1/4	1/4	-1/2	-1/4	0	-1/4	-1/4	0
8	0	-1/4	1/4	0	-1/4	1/2	-1/4	-1/4	0
9	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Lösungsmatrix

S	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	1
2	-1/4	3/4	-3/4	1/4	1/4	-1/4	1
3	3/4	1/4	1/4	-1/4	1/4	1/4	-1
4	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	-1
5	1/4	-1/4	3/4	1/4	-1/4	-1/4	-1
6	0	-1/2	1	1/2	0	1/2	-1
7	1/4	-1/4	-1/4	1/4	-1/4	-1/4	0
8	1/4	-1/4	-1/4	1/4	-1/4	-1/4	0
9	0	0	0	0	0	0	0

9.1.2 Doppelsubstitution, durchgängige Driftkonstanz bei 2 Objekten

12 Wägewerte, Wägeschema N P P N N P P N N P P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 10

Erweiterte Wägematrix

x	j		i											
	1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Transponiert, erweitert, expandiert

x_e^T			1 2 3 4 ... 12 13 14 ... 23											
			x^T											
			i											
			1	2	3	4	...	12	...					
1	x^T	j	1	1	0	0	1	...	1	0	0	...	0	
2		2	0	1	1	0	...	0	0	0	...	0		
3		i	1	1	0	0	0	...	0	0	0	...	0	
4		2	0	1	0	0	...	0	0	0	...	0		
5		3	0	0	1	0	...	0	0	0	...	0		
6		4	0	0	0	1	...	0	0	0	...	0		
7		5	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
8		6	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
9		7	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
10		8	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
11		9	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
12		10	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
13		11	0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
14		12	0	0	0	0	...	1	0	0	...	0		
15			0	0	0	0	...	0	1	0	...	0		
16			0	0	0	0	...	0	0	1	...	0		
17			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
18			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
19			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
20			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
21			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
22			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
23			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
24			0	0	0	0	...	0	0	0	...	0		
25			0	0	0	0	...	0	0	0	...	1		

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{x}^T \mathbf{x})_e$			1 2 3 4 5 ... 14 15 16 17 ... 24 25																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
			$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$												\mathbf{D}^T											\mathbf{x}_1^T																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
			j	i	k																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
		1 2	1 2 3 ... 12	1 2 3 ... 10																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	23
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	1
3	59/156	9/52	7/52	41/156	35/156	1/52	- 1/52	17/156	11/156	- 7/52	- 9/52	- 7/156	-1
4	53/156	81/572	63/572	421/1716	367/1716	9/572	- 9/572	205/1716	151/1716	- 63/572	- 81/572	- 1/156	-1
5	47/156	63/572	49/572	391/1716	349/1716	7/572	- 7/572	223/1716	181/1716	- 49/572	- 63/572	5/156	-1
6	41/156	45/572	35/572	361/1716	331/1716	5/572	- 5/572	241/1716	211/1716	- 35/572	- 45/572	11/156	-1
7	35/156	27/572	21/572	331/1716	313/1716	3/572	- 3/572	259/1716	241/1716	- 21/572	- 27/572	17/156	-1
8	29/156	9/572	7/572	301/1716	295/1716	1/572	- 1/572	277/1716	271/1716	- 7/572	- 9/572	23/156	-1
9	23/156	- 9/572	- 7/572	271/1716	277/1716	- 1/572	1/572	295/1716	301/1716	7/572	9/572	29/156	-1
10	17/156	- 27/572	- 21/572	241/1716	259/1716	- 3/572	3/572	313/1716	331/1716	21/572	27/572	35/156	-1
11	11/156	- 45/572	- 35/572	211/1716	241/1716	- 5/572	5/572	331/1716	361/1716	35/572	45/572	41/156	-1
12	5/156	- 63/572	- 49/572	181/1716	223/1716	- 7/572	7/572	349/1716	391/1716	49/572	63/572	47/156	-1
13	- 1/156	- 81/572	- 63/572	151/1716	205/1716	- 9/572	9/572	367/1716	421/1716	63/572	81/572	53/156	-1
14	- 7/156	- 9/52	- 7/52	11/156	17/156	- 1/52	1/52	35/156	41/156	7/52	9/52	59/156	-1
15	97/156	- 9/52	- 7/52	- 41/156	- 35/156	- 1/52	1/52	- 17/156	- 11/156	7/52	9/52	7/156	0
16	167/156	593/1716	- 937/1716	-1037/1716	- 851/1716	- 379/1716	- 193/1716	- 293/1716	- 107/1716	365/1716	551/1716	41/156	0
17	18/13	84/143	- 30/143	- 144/143	- 115/143	- 86/143	- 57/143	- 28/143	1/143	30/143	59/143	8/13	0
18	56/39	322/429	28/429	- 266/429	- 560/429	- 425/429	- 290/429	- 155/429	- 20/429	115/429	250/429	35/39	0
19	197/156	1487/1716	521/1716	- 731/1716	-1697/1716	-2377/1716	-1627/1716	-1163/1716	- 413/1716	623/1716	1373/1716	167/156	0
20	167/156	1373/1716	623/1716	- 413/1716	-1163/1716	-1627/1716	-2377/1716	-1697/1716	- 731/1716	521/1716	1487/1716	197/156	0
21	35/39	250/429	115/429	- 20/429	- 155/429	- 290/429	- 425/429	- 560/429	- 266/429	28/429	322/429	56/39	0
22	8/13	59/143	30/143	1/143	- 28/143	- 57/143	- 86/143	- 115/143	- 144/143	- 30/143	84/143	18/13	0
23	41/156	551/1716	365/1716	- 107/1716	- 293/1716	- 193/1716	- 379/1716	- 851/1716	-1037/1716	- 937/1716	593/1716	167/156	0
24	7/156	9/52	7/52	- 11/156	- 17/156	1/52	- 1/52	- 35/156	- 41/156	- 7/52	- 9/52	97/156	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.3 Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen bei 2 Objekten

9.1.3.1 5 Wägewerte, Wägeschema N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 1

Erweiterte Wägematrix

x		j		i				
		1	2	1	2	3	4	5
i	1	1	0	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0
	3	1	0	0	0	1	0	0
	4	0	1	0	0	0	1	0
	5	1	0	0	0	0	0	1

Transponiert, erweitert, expandiert

x_e^T			1	2	3	4	5	6	7	8
			x^T							
			i							
			1	2	3	4	5			
j	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x^T	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Expandierte Normalmatrix

$(x^T x)_e$			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			$x^T x$					D^T		x_1^T		
								k				
			1	2	1	2	3	4	5	1	2	
j	1	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	2	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
	4	0	1	0	1	0	0	0	0	-2	0	0
	5	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
$x^T x$	6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	-2	0
	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	8	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Inverse Normalmatrix

$(x^T x)_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	7/8	-1/4	-3/8	-1/2	-3/8	-1/4	1/4	1/4	1
3	0	-1/4	9/10	9/20	0/1	1/20	1/10	1/10	-1/10	-1
4	0	-3/8	9/20	19/40	1/2	11/40	1/20	-9/20	-1/20	-1
5	0	-1/2	0/1	1/2	1/1	1/2	0	0	0	-1
6	0	-3/8	1/20	11/40	1/2	19/40	9/20	-1/20	-9/20	-1
7	0	-1/4	1/10	1/20	0/1	9/20	9/10	-1/10	1/10	-1
8	0	1/4	1/10	-9/20	0/1	-1/20	-1/10	-1/10	1/10	0
9	0	1/4	-1/10	-1/20	0/1	-9/20	1/10	1/10	-1/10	0
10	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-1/4	1/2	-1/2	1/2	-1/4	1/4	1/4	1
3	9/10	1/5	0	-1/5	1/10	1/10	-1/10	-1
4	9/20	1/10	1/2	-1/10	1/20	-9/20	-1/20	-1
5	0	0	1	0	0	0	0	-1
6	1/20	-1/10	1/2	1/10	9/20	-1/20	-9/20	-1
7	1/10	-1/5	0	1/5	9/10	-1/10	1/10	-1
8	1/10	-1/5	0	1/5	-1/10	-1/10	1/10	0
9	-1/10	1/5	0	-1/5	1/10	1/10	-1/10	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.3.2 7 Wägewerte, Wägeschema N P N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 2

Erweiterte Wagematrix

x		j		i						
		1	2	1	2	3	4	5	6	7
i	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	4	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	5	1	0	0	0	0	0	1	0	0
	6	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	7	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Transponiert, erweitert, expandiert

\mathbf{x}_e^T			\mathbf{x}^T										
			i										
			1	2	3	4	5	6	7				
1	\mathbf{x}^T	j 1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
2		2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3		i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4			2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5			3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6			4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7			5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8			6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9			7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10			0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
11			0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
12			0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
13			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{x}^\top \mathbf{x})_e$			1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13												
			$\mathbf{x}^\top \mathbf{x}$							\mathbf{D}^\top			\mathbf{x}_1^\top		
			j		i					k					
			1 2	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3										
1	$\mathbf{x}^\top \mathbf{x}$	j 1	4 0	1 0 1 0 1 0 1	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0	0								
2		2	0 3	0 1 0 1 0 1 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	0								
3		i 1	1	1 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0	0							
4			2	0 1	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	-2 0 0 0	0							
5			3	1 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 1 0 0	0							
6			4	0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 -2 0 0	0							
7			5	1 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0	0 1 1 0	0							
8			6	0 1	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1	0 0 -2 0	0							
9			7	1 0	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 1 0	0							
10	\mathbf{D}	k 1	0 0	1 -2 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	0								
11		2	0 0	0 0 1 -2 1 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	0								
12		3	0 0	0 0 0 0 1 -2 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0	0								
13	\mathbf{x}_1		1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	0									

Inverse Normalmatrix

$(x^T x)_e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	17/28	-5/28	-1/4	-9/28	-9/28	-9/28	-1/4	-5/28	5/28	1/7	5/28	1
3	0	-5/28	37/42	5/12	-1/21	1/28	5/42	1/12	1/21	5/42	-1/14	-1/21	-1
4	0	-1/4	5/12	5/12	5/12	1/4	1/12	1/12	1/12	-5/12	0	-1/12	-1
5	0	-9/28	-1/21	5/12	37/42	13/28	1/21	1/12	5/42	1/21	1/14	-5/42	-1
6	0	-9/28	1/28	1/4	13/28	13/28	13/28	1/4	1/28	-1/28	-3/7	-1/28	-1
7	0	-9/28	5/42	1/12	1/21	13/28	37/42	5/12	-1/21	-5/42	1/14	1/21	-1
8	0	-1/4	1/12	1/12	1/12	1/4	5/12	5/12	5/12	-1/12	0/1	-5/12	-1
9	0	-5/28	1/21	1/12	5/42	1/28	-1/21	5/12	37/42	-1/21	-1/14	5/42	-1
10	0	5/28	5/42	-5/12	1/21	-1/28	-5/42	-1/12	-1/21	-5/42	1/14	1/21	0
11	0	1/7	-1/14	0	1/14	-3/7	1/14	0/1	-1/14	1/14	-1/7	1/14	0
12	0	5/28	-1/21	-1/12	-5/42	-1/28	1/21	-5/12	5/42	1/21	1/14	-5/42	0
13	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-5/28	5/14	-9/28	2/7	-9/28	5/14	-5/28	5/28	1/7	5/28	1
3	37/42	5/21	-1/21	-1/7	5/42	-2/21	1/21	5/42	-1/14	-1/21	-1
4	5/12	1/6	5/12	0	1/12	-1/6	1/12	-5/12	0	-1/12	-1
5	-1/21	2/21	37/42	1/7	1/21	-5/21	5/42	1/21	1/14	-5/42	-1
6	1/28	-1/14	13/28	1/7	13/28	-1/14	1/28	-1/28	-3/7	-1/28	-1
7	5/42	-5/21	1/21	1/7	37/42	2/21	-1/21	-5/42	1/14	1/21	-1
8	1/12	-1/6	1/12	0	5/12	1/6	5/12	-1/12	0	-5/12	-1
9	1/21	-2/21	5/42	-1/7	-1/21	5/21	37/42	-1/21	-1/14	5/42	-1
10	5/42	-5/21	1/21	1/7	-5/42	2/21	-1/21	-5/42	1/14	1/21	0
11	-1/14	1/7	1/14	-2/7	1/14	1/7	-1/14	1/14	-1/7	1/14	0
12	-1/21	2/21	-5/42	1/7	1/21	-5/21	5/42	1/21	1/14	-5/42	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.3.3 9 Wägewerte, Wägeschema N P N P N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 3

Erweitertes Wägematrix

x	j	i
	1 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1	1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0
2	0 1	0 1 0 0 0 0 0 0 0
3	1 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0
4	0 1	0 0 0 1 0 0 0 0 0
5	1 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0
6	0 1	0 0 0 0 0 1 0 0 0
7	1 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0
8	0 1	0 0 0 0 0 0 0 1 0
9	1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1

Transponiert, erweitert, expandiert

x^T_e			1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
			x^T
		i	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1	j	1	1 0 1 0 1 0 1 0 1
2		2	0 1 0 1 0 1 0 1 0
3	i	1	1 0 0 0 0 0 0 0 0
4		2	0 1 0 0 0 0 0 0 0
5		3	0 0 1 0 0 0 0 0 0
11		9	0 0 0 0 0 0 0 0 1
12			0 0 0 0 0 0 0 0 0
13			0 0 0 0 0 0 0 0 0
14			0 0 0 0 0 0 0 0 0
15			0 0 0 0 0 0 0 0 0
16			0 0 0 0 0 0 0 0 0

Expandierte Normalmatrix

$(x^T x)_e$			1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
			$x^T x$
		j	i
		1 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9
1	j	1	5 0
2		2	0 4
3	i	1	1 0
4		2	0 1
5		3	1 0
11		9	1 0
12	k	1	0 0
13		2	0 0
14	D	3	0 0
15		4	0 0
16	x_1		1 0

Lösungsmatrix

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	- 3/22	3/11	- 1/4	5/22 - 5/22	5/22	- 1/4	3/11	- 3/22	3/22	5/44	5/44	3/22	3/22	1
3	277/319	84/319	- 2/29 - 40/319	1/11 - 18/319	2/29 - 26/319	13/319	42/319	- 20/319	- 9/319	- 13/319	- 1	- 1	- 1	- 1
4	255/638	64/319	45/116	15/638	1/22 - 73/638	13/116 - 35/319	35/638	-255/638	1/85	- 25/437	- 35/638	- 1	- 1	- 1
5	- 2/29	4/29	49/58	5/29	0 - 5/29	9/58 - 4/29	2/29	2/29	5/58	- 5/58	- 2/29	- 1	- 1	- 1
6	7/638	- 7/319	49/116	113/638	9/22	3/638	9/116 - 51/319	51/638	- 7/638	-151/367	2/851	- 51/638	- 1	- 1
7	1/11	- 2/11	0	2/11	9/11	2/11	0 - 2/11	1/11	- 1/11	1/11	1/11	- 1/11	- 1	- 1
8	51/638 - 51/319	9/116	3/638	9/22	113/638	49/116 - 7/319	7/638	-51/638	1/425	-151/367	- 7/638	- 1	- 1	- 1
9	2/29	- 4/29	9/58	- 5/29	0	5/29	49/58	4/29	- 2/29	- 2/29	- 5/58	5/58	2/29	- 1
10	35/638 - 35/319	13/116 - 73/638	1/22	15/638	45/116	64/319	255/638	-35/638	- 48/839	1/85	-255/638	- 1	- 1	- 1
11	13/319 - 26/319	2/29 - 18/319	1/11 - 40/319	- 2/29	84/319	277/319	- 13/319	- 9/319	- 20/319	42/319	- 1	- 1	- 1	- 1
12	42/319 - 84/319	2/29	40/319 - 1/11	18/319	- 2/29	26/319 - 13/319	- 42/319	20/319	9/319	13/319	0	0	0	0
13	- 20/319	40/319	5/58 - 95/319	1/11	37/319	- 5/58	18/319 - 9/319	20/319	- 95/638	37/638	9/319	0	0	0
14	- 9/319	18/319	- 5/58	37/319	1/11 - 95/319	5/58	40/319 - 20/319	9/319	37/638	- 95/638	20/319	0	0	0
15	- 13/319	26/319	- 2/29	18/319 - 1/11	40/319	2/29 - 84/319	42/319	13/319	9/319	20/319	- 42/319	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.3.4 11 Wägewerte, Wägeschema N P N P N P N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 4

Erweiterte Wägematrix

x	j	i
	1 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
i	1	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	2	0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
	3	1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
	4	0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
	5	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
	6	0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
	7	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
	8	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
	9	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
	10	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
	11	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

Transponiert, erweitert, expandiert

x^T_e		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
	x^T	
	i	
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	
1	j	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0
2	2	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0
3	i	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4	2	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
5	x^T	3 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
...		...
13	11	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
14		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
...		...
19		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{x}^T \mathbf{x})_e$		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19																		
		$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$													\mathbf{D}^T					\mathbf{x}_1^T
		j		i											k					
		1 2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	1 2 3 4 5																
1	j	1	6 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1		
2		2	0 5	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0		
3	i	1	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0		
4		2	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	-2 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0		
5	$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$	3	1 0	0 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0		
...			
13	11	1	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	0 0	0 0	0 0	1 0	0		
14		\mathbf{D}	k	1	0 0	1 -2	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0		
...		
19	\mathbf{x}_1		1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0		

Lösungsmatrix S

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	17
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1
2	- 29/262	29/131	- 53/262	24/131	- 49/262	25/131	- 49/262	24/131	- 53/262	29/131	- 29/262	...	1
3	3947/4585	1276/4585	- 76/917	- 516/4585	363/4585	- 6/131	232/4585	- 254/4585	55/917	- 296/4585	148/4585	...	-1
4	3567/9170	1018/4585	675/1834	192/4585	263/9170	- 13/131	787/9170	- 332/4585	151/1834	- 423/4585	423/9170	...	-1
5	- 76/917	152/917	751/917	180/917	- 20/917	- 20/131	111/917	- 82/917	96/917	- 110/917	55/917	...	-1
6	- 17/9170	17/4585	731/1834	913/4585	3567/9170	3/131	423/9170	- 528/4585	207/1834	- 507/4585	507/9170	...	-1
7	363/4585	- 726/4585	- 20/917	926/4585	3667/4585	26/131	- 132/4585	- 646/4585	111/917	- 464/4585	232/4585	...	-1
8	17/262	- 17/131	13/262	4/131	101/262	26/131	101/262	4/131	13/262	- 17/131	17/262	...	-1
9	232/4585	- 464/4585	111/917	- 646/4585	- 132/4585	26/131	3667/4585	926/4585	- 20/917	- 726/4585	363/4585	...	-1
10	507/9170	- 507/4585	207/1834	- 528/4585	423/9170	3/131	3567/9170	913/4585	731/1834	17/4585	- 17/9170	...	-1
11	55/917	- 110/917	96/917	- 82/917	111/917	- 20/131	- 20/917	180/917	751/917	152/917	- 76/917	...	-1
12	423/9170	- 423/4585	151/1834	- 332/4585	787/9170	- 13/131	263/9170	192/4585	675/1834	1018/4585	3567/9170	...	-1
13	148/4585	- 296/4585	55/917	- 254/4585	232/4585	- 6/131	363/4585	- 516/4585	- 76/917	1276/4585	3947/4585	...	-1
14	638/4585	- 1276/4585	76/917	516/4585	- 363/4585	6/131	- 232/4585	254/4585	- 55/917	296/4585	- 148/4585	...	0
15	- 258/4585	516/4585	90/917	- 1416/4585	463/4585	14/131	- 323/4585	156/4585	- 41/917	254/4585	- 127/4585	...	0
16	- 3/131	6/131	- 10/131	14/131	13/131	- 40/131	13/131	14/131	- 10/131	6/131	- 3/131	...	0
17	- 127/4585	254/4585	- 41/917	156/4585	- 323/4585	14/131	463/4585	- 1416/4585	90/917	516/4585	- 258/4585	...	0
18	- 148/4585	296/4585	- 55/917	254/4585	- 232/4585	6/131	- 363/4585	516/4585	76/917	- 1276/4585	638/4585	...	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0

9.1.4 Doppelsubstitution mit unabhängigen Zyklen bei 2 Objekten
12 Wägewerte, Wägeschema N P P N N P P N N P P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Statistischer Freiheitsgrad 5

Erweiterte Wagematrix

x		j		i					
		1	2	1	2	...	11	12	
i	1	1	0	1	0	...	0	0	
	2	0	1	0	1	...	0	0	
	3	0	1	0	0	...	0	0	
	4	1	0	0	0	...	0	0	
	5	1	0	0	0	...	0	0	
	6	0	1	0	0	...	0	0	
	7	0	1	0	0	...	0	0	
	8	1	0	0	0	...	0	0	
	9	1	0	0	0	...	0	0	
	10	0	1	0	0	...	0	0	
	11	0	1	0	0	...	1	0	
	12	1	0	0	0	...	0	1	

Transponiert, erweitert, expandiert

x_e^T		1 2 3 4 5 6 ... 11 12 13 14 15 18 19																	
		x^T																	
		i																	
j	1	1	0	0	1	1	0	...	0	1	0	0	...	0	0	...	0	0	
	2	0	1	1	0	0	1	...	1	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	3	0	1	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	4	1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	5	1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	6	0	1	0	0	1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	
	11	0	0	0	0	0	0	...	1	0	0	0	...	0	0	...	0	0	
	12	0	0	0	0	0	0	...	0	1	0	0	...	0	0	...	0	0	
	13	0	0	0	0	0	0	...	0	0	1	0	...	0	0	...	0	0	
	14	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	1	...	0	0	...	0	0	
	15	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	1	0	...	0	0	
	
	20	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	1	0	
	21	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	1	

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_e$		1 2 3 4 5 6 ... 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21																				
		$\mathbf{X}^T \mathbf{X}$												\mathbf{D}^T						\mathbf{x}_1^T		
		j		i										k								
		1	2	1	2	3	4	...	10	11	12	1	2	3	4	5	6					
1	$\mathbf{X}^T \mathbf{X}$	j	1	6	0	1	0	0	1	...	0	0	1	0	0	0	0	0	1			
2		2	0	6	0	1	1	0	...	1	1	0	0	0	0	0	0	0				
3		i	1	1	0	1	0	0	0	...	0	0	0	1	0	0	0	0	0			
4			2	0	1	0	1	0	0	...	0	0	0	-2	1	0	0	0	0			
5			3	0	1	0	0	1	0	...	0	0	0	1	-2	0	0	0	0			
6	4	1	0	0	0	0	1	...	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0				
...																						
13		11	0	1	0	0	0	0	...	0	1	0	0	0	0	1	-2	0				
14		12	1	0	0	0	0	0	...	0	0	1	0	0	0	0	1	0				
15	\mathbf{D}	k	1	0	0	1	-2	1	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0				
16		2	0	0	0	1	-2	1	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
...																		0	0			
20		6	0	0	0	0	0	0	...	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0			
21		\mathbf{x}_1		1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Lösungsmatrix

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	- 1/6	1/6	1/6	- 1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
3	47/60	19/60	1/60	- 7/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	13/60	7/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-1
4	29/60	13/60	7/60	11/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	-29/60	-11/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-1
5	11/60	7/60	13/60	29/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	-11/60	-29/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-1
6	- 7/60	1/60	19/60	47/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	7/60	13/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-1
7	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	47/60	19/60	1/60	- 7/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	13/60	7/60	- 1/12	- 1/12	-1
8	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	29/60	13/60	7/60	11/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	-29/60	-11/60	- 1/12	- 1/12	-1
9	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	11/60	7/60	13/60	29/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	-11/60	-29/60	- 1/12	- 1/12	-1
10	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 7/60	1/60	19/60	47/60	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	7/60	13/60	- 1/12	- 1/12	-1
11	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	47/60	19/60	1/60	- 7/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	13/60	7/60	-1
12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	29/60	13/60	7/60	11/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-29/60	-11/60	-1
13	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	11/60	7/60	13/60	29/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	-11/60	-29/60	-1
14	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	- 7/60	1/60	19/60	47/60	- 1/12	- 1/12	- 1/12	- 1/12	7/60	13/60	-1
15	13/60	-19/60	- 1/60	7/60	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	-13/60	- 7/60	1/12	1/12	1/12	1/12	0
16	7/60	- 1/60	-19/60	13/60	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 7/60	-13/60	1/12	1/12	1/12	1/12	0
17	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	13/60	-19/60	- 1/60	7/60	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	1/12	1/12	-13/60	- 7/60	1/12	1/12	0
18	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	7/60	- 1/60	-19/60	13/60	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 7/60	-13/60	1/12	1/12	0
19	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	13/60	-19/60	- 1/60	7/60	1/12	1/12	1/12	1/12	-13/60	- 7/60	0
20	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	- 1/12	1/12	1/12	- 1/12	7/60	- 1/60	-19/60	13/60	1/12	1/12	1/12	1/12	- 7/60	-13/60	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.5 Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen und Gewichtung

2 Objekte, 7 Wägewerte, gewichtet, Wägeschema N P N P N P N, Luftdichte $\rho_a = 0$

Faktoren		Gewichtung							Erweiterte Wägematrix									Wägematrix bei Gewichtung											
		<i>w</i>							<i>x</i>	<i>j</i>	<i>i</i>								<i>wx</i>										
			1	2	3	4	5	6	7		1	2	1	2	3	4	5	6	7		1	2	1	2	3	4	5	6	7
1	0,13838	1	0,138	0	0	0	0	0	0	<i>i</i>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0,138	0	0,138	0	0	0	0	0	0
2	0,13838	2	0	0,138	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0,138	0	0,138	0	0	0	0	0
3	0,14587	3	0	0	0,146	0	0	0	0	3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0,146	0	0	0	0,146	0	0	0	0
4	0,15472	4	0	0	0	0,155	0	0	0	4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0,155	0	0	0	0,155	0	0	0
5	0,14587	5	0	0	0	0	0,146	0	0	5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	5	0,146	0	0	0	0	0	0,146	0	0
6	0,13838	6	0	0	0	0	0	0,138	0	6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	6	0	0,138	0	0	0	0	0	0,138	0
7	0,13838	7	0	0	0	0	0	0	0,138	7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	7	0,138	0	0	0	0	0	0	0	0,138

Transponiert, erweitert, expandiert

$(\mathbf{x}^T \mathbf{w}^2)_e$			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
			$\mathbf{x}^T \mathbf{w}^2$											
			i											
			1	2	3	4	5	6	7					
1	$\mathbf{x}^T \mathbf{w}^2$	j 1	0,019	0	0,021	0	0,021	0	0,019	0	0	0	0	
2		2	0	0,019	0	0,024	0	0,019	0	0	0	0	0	
3		i 1	0,019	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4		2	0	0,019	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		3	0	0	0,021	0	0	0	0	0	0	0	0	
6		4	0	0	0	0,024	0	0	0	0	0	0	0	
7		5	0	0	0	0	0,021	0	0	0	0	0	0	
8		6	0	0	0	0	0	0,019	0	0	0	0	0	
9		7	0	0	0	0	0	0	0,019	0	0	0	0	
10			0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
11			0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
12			0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
13			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

Expandierte Normalmatrix

$(\mathbf{x}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{x})_e$			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
			$\mathbf{x}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{x}$										\mathbf{D}^T			\mathbf{x}_1^T
			j			i								k		
			1	2	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3		
1	$\mathbf{x}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{x}$	j	1	0,081	0	0,019	0	0,021	0	0,021	0	0,019	0	0	0	1
2		2	0	0,062	0	0,019	0	0,024	0	0,019	0	0	0	0	0	0
3		i	1	0,019	0	0,019	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
4			2	0	0,019	0	0,019	0	0	0	0	0	2	0	0	0
5			3	0,021	0	0	0	0,021	0	0	0	0	-1	-1	0	0
6		4	0	0,024	0	0	0	0,024	0	0	0	0	0	2	0	0
7		5	0,021	0	0	0	0	0	0,021	0	0	0	0	-1	-1	0
8		6	0	0,019	0	0	0	0	0	0,019	0	0	0	0	2	0
9		7	0,019	0	0	0	0	0	0	0	0,019	0	0	0	-1	0
10	\mathbf{D}	k	1	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11		2	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0
12		3	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0
13	\mathbf{x}_1			1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Inverse Normalmatrix

$(X^T W^2 X)^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	29,590337	-8,70304	-12,18426	-15,66547	-15,66547	-15,66547	-12,18426	-8,70304	-0,166667	-0,166667	-0,166667	1
3	0	-8,70304	45,670275	21,798976	-2,072324	1,9104235	5,8931708	4,0978764	2,302582	-0,125396	0,0813008	0,0440954	-1
4	0	-12,18426	21,798976	20,804548	19,81012	11,844626	3,8791311	3,9885038	4,0978764	0,417459	0,004065	0,078476	-1
5	0	-15,66547	-2,072324	19,81012	41,692564	21,778828	1,8650914	3,8791311	5,8931708	-0,039686	-0,073171	0,1128566	-1
6	0	-15,66547	1,9104235	11,844626	21,778828	21,778828	21,778828	11,844626	1,9104235	0,0365854	0,4268293	0,0365854	-1
7	0	-15,66547	5,8931708	3,8791311	1,8650914	21,778828	41,692564	19,81012	-2,072324	0,1128566	-0,073171	-0,039686	-1
8	0	-12,18426	4,0978764	3,9885038	3,8791311	11,844626	19,81012	20,804548	21,798976	0,078476	0,004065	0,417459	-1
9	0	-8,70304	2,302582	4,0978764	5,8931708	1,9104235	-2,072324	21,798976	45,670275	0,0440954	0,0813008	-0,125396	-1
10	0	-0,166667	-0,125396	0,417459	-0,039686	0,0365854	0,1128566	0,078476	0,0440954	-0,002401	0,0015569	0,0008444	0
11	0	-0,166667	0,0813008	0,004065	-0,073171	0,4268293	-0,073171	0,004065	0,0813008	0,0015569	-0,003114	0,0015569	0
12	0	-0,166667	0,0440954	0,078476	0,1128566	0,0365854	-0,039686	0,417459	-0,125396	0,0008444	0,0015569	-0,002401	0
13	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Lösungsmatrix nach Gewichtung

S^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	-0,166667	0,3333333	-0,333333	0,3333333	-0,333333	0,3333333	-0,166667	-0,166667	-0,166667	-0,166667	1
3	0,8746038	0,2507923	-0,044095	-0,162602	0,1253962	-0,088191	0,0440954	-0,125396	0,0813008	0,0440954	-1
4	0,417459	0,165082	0,421524	-0,00813	0,082541	-0,156952	0,078476	0,417459	0,004065	0,078476	-1
5	-0,039686	0,0793716	0,8871434	0,1463415	0,0396858	-0,225713	0,1128566	-0,039686	-0,073171	0,1128566	-1
6	0,0365854	-0,073171	0,4634146	0,1463415	0,4634146	-0,073171	0,0365854	0,0365854	0,4268293	0,0365854	-1
7	0,1128566	-0,225713	0,0396858	0,1463415	0,8871434	0,0793716	-0,039686	0,1128566	-0,073171	-0,039686	-1
8	0,078476	-0,156952	0,082541	-0,00813	0,421524	0,165082	0,417459	0,078476	0,004065	0,417459	-1
9	0,0440954	-0,088191	0,1253962	-0,162602	-0,044095	0,2507923	0,8746038	0,0440954	0,0813008	-0,125396	-1
10	-0,002401	0,0048028	-0,000844	-0,003114	0,0024014	-0,001689	0,0008444	-0,002401	0,0015569	0,0008444	0
11	0,0015569	-0,003114	-0,001557	0,0062278	-0,001557	-0,003114	0,0015569	0,0015569	-0,003114	0,0015569	0
12	0,0008444	-0,001689	0,0024014	-0,003114	-0,000844	0,0048028	-0,002401	0,0008444	0,0015569	-0,002401	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

9.1.6 Gewichtung von Wägewertdifferenzen

Einfachsubstitution, 2 Objekte, Luftdichte $\rho_a = 0$, zusammenhängende Zyklen

n_d	2					3							4									5											
Driftänderungsmatrix \mathbf{X}_d																																	
k	j																																
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	-2	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	-2	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
3						0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
4													0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
5																						0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0

Lösungsmatrix der Gewichtungen $\mathbf{X}_d^T (\mathbf{X}_d \mathbf{X}_d^T)^{-1}$

j	k																		
	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	6/35	-1/35	35/204	-1/34	1/204	204/1189	-35/1189	6/1189	-1/1189	1189/6930	-34/1155	1/198	-1/1155	1/6930					
2	-12/35	2/35	-35/102	1/17	-1/102	-408/1189	70/1189	-12/1189	2/1189	-1189/3465	68/1155	-1/99	2/1155	-1/3465					
3	1/7	1/7	29/204	5/34	-5/204	169/1189	175/1189	-30/1189	5/1189	197/1386	34/231	-5/198	1/231	-1/1386					
4	2/35	-12/35	1/17	-6/17	1/17	70/1189	-420/1189	72/1189	-12/1189	68/1155	-136/385	2/33	-4/385	2/1155					
5	-1/35	6/35	-5/204	5/34	29/204	-1/41	6/41	6/41	-1/41	-169/6930	169/1155	29/198	-29/1155	29/6930					
6			-1/102	1/17	-35/102	-12/1189	72/1189	-420/1189	70/1189	-1/99	2/33	-35/99	2/33	-1/99					
7			1/204	-1/34	35/204	5/1189	-30/1189	175/1189	169/1189	29/6930	-29/1155	29/198	169/1155	-169/6930					
8						2/1189	-12/1189	70/1189	-408/1189	2/1155	-4/385	2/33	-136/385	68/1155					
9						-1/1189	6/1189	-35/1189	204/1189	-1/1386	1/231	-5/198	34/231	197/1386					
10										-1/3465	2/1155	-1/99	68/1155	-1189/3465					
11										1/6930	-1/1155	1/198	-34/1155	1189/6930					

2. Zeile der Lösungsmatrix für den Massewert \mathbf{S}_2

j	k																		
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
-1/4	1/2	-1/2	1/2	-1/4	-5/28	5/14	-9/28	2/7	-9/28	5/14	-5/28	3/22	3/11	-1/4	5/22	-5/22	5/22	-1/4	3/11

Gewichtungen der Wägewertdifferenzen \mathbf{w}_d^T

k														
	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
-1/2	-1/2		-5/14	-2/7	-5/14	-3/11	-5/22	-5/22	-3/11	-29/131	-24/131	-25/131	-24/131	-29/131

9.1.7 Gewichtung von Wägewerten

Herkömmliche Mittelwertbildung bei der Einfachsubstitution, 2 Objekte, Luftdichte $\rho_a = 0$, zusammenhängende Zyklen

$$n_d = 2$$

Driftänderungsmatrix

x_d		j				
		1	2	3	4	5
k	1	1	-2	1	0	0
	2	0	0	1	-2	1

Vektor

$d^T(n_d)$		k	
		1	2
		1	1

2. Zeile der Lösungsmatrix für den Massewert

s_2		j				
		1	2	3	4	5
		- 1/4	1/2	- 1/2	1/2	- 1/4

Diagonalelemente des Wägewert -Multiplikators

w_{sj}		j				
		1	2	3	4	5
		-2	-2	-2	-2	-2

Gewichtungen der Wägewerte

w_i		i				
		1	2	3	4	5
		1,414214	1,414214	1,414214	1,414214	1,414214

Normierte Gewichtungen der Wägewerte

w_{ni}		i				
		1	2	3	4	5
		0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$$n_d = 3$$

Driftänderungsmatrix

x_d		j						
		1	2	3	4	5	6	7
k	1	1	-2	1	0	0	0	0
	2	0	0	1	-2	1	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1

Vektor

$d^T(n_d)$		k		
		1	2	3
		1	1	1

2. Zeile der Lösungsmatrix für den Massewert

s_2		j						
		1	2	3	4	5	6	7
		- 5/28	5/14	- 9/28	2/7	- 9/28	5/14	- 5/28

Diagonalelemente des Wägewert - Multiplikators

w_{sj}		j						
		1	2	3	4	5	6	7
		- 14/5	- 14/5	- 28/9	- 7/2	- 28/9	- 14/5	- 14/5

Gewichtungen der Wägewerte

w_i		i						
		1	2	3	4	5	6	7
		1,67332	1,67332	1,763834	1,870829	1,763834	1,67332	1,67332

Normierte Gewichtungen der Wägewerte

w_{ni}		i						
		1	2	3	4	5	6	7
		0,138385	0,138385	0,145871	0,154719	0,145871	0,138385	0,138385

$$n_d = 4$$

Driftänderungsmatrix

\mathbf{x}_d		j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	1	-2	1

Vektor

$\mathbf{d}^T(n_d)$		k			
		1	2	3	4
		1	1	1	1

2. Zeile der Lösungsmatrix für den Massewert

\mathbf{s}_2		j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		- 3/22	3/11	- 1/4	5/22	- 5/22	5/22	- 1/4	3/11	- 3/22

Diagonalelemente des Wägewert - Multiplikators

\mathbf{w}_{sj}		j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		- 11/3	- 11/3	- 4/1	- 22/5	- 22/5	- 22/5	- 4/1	- 11/3	- 11/3

Gewichtungen der Wägewerte

\mathbf{w}_i		i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1,914854216	1,91485422	2	2,0976177	2,097618	2,097618	2	1,914854	1,914854

Normierte Gewichtungen der Wägewerte

\mathbf{w}_{ni}		i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0,106663626	0,10666363	0,1114065	0,11684415	0,116844	0,116844	0,111407	0,106664	0,106664

$$n_d = 5$$

Driftänderungsmatrix

\mathbf{x}_d		j										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1

2. Zeile der Lösungsmatrix für den Massewert

\mathbf{s}_2		j										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		- 29/262	29/131	- 53/262	24/131	- 49/262	25/131	- 49/262	24/131	- 53/262	29/131	- 29/262

Vektor

$\mathbf{d}^j(n_d)$		k				
		1	2	3	4	5
		1	1	1	1	1

Diagonalelemente des Wägewert - Multiplikators

\mathbf{w}_{sj}		j										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		-131/29	-131/29	-262/53	-131/24	-262/49	-131/25	-262/49	-131/24	-262/53	-131/29	-131/29

Gewichtungen der Wägewerte

\mathbf{w}_i		i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		2,12538	2,12538	2,223375	2,336308	2,312345	2,289105	2,312345	2,336308	2,223375	2,12538	2,12538

Normierte Gewichtungen der Wägewerte

\mathbf{w}_{ni}		i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		0,086628	0,086628	0,090622	0,095225	0,094248	0,093301	0,094248	0,095225	0,090622	0,086628	0,086628

9.2 Beispiele zu den freien, verschwindenden Driftänderungen

9.2.1 Freies lineares Driftmodell mit einem Zyklus

Wägeschema N P N, alternierender Lastwechsel, 2 Objekte und 3 Wägewerte, Luftdichte $\rho_a = 0$, statistischer Freiheitsgrad 0

Erweiterte Wägematrix					Transponierte Wägematrix					Normalisierte Wägematrix					Driftmatrix					Transponierte Driftmatrix					Normalisierte Driftmatrix									
\mathbf{x}	j		i			\mathbf{x}^\top	i			$\mathbf{x}^\top \mathbf{x}$						\mathbf{D}	j		i			\mathbf{D}^\top	k						$\mathbf{D}^\top \mathbf{D}$					
	1	2	1	2	3		1	2	3		1	2	3	4	5		1	2	1	2	3		1		1	2	3	4	5					
i	1	0	1	0	0	j	1	0	1	1	2	0	1	0	1	k	1	0	0	1	-2	1	j	1	0	1	0	0	0	0				
2	0	1	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	-2	1	2	0	2	0	0	0	0	0				
3	1	0	0	0	1	i	1	0	0	3	1	0	1	0	0								i	1	1	3	0	0	1	-2	1			
						2	0	1	0	4	0	1	0	1	0								2	-2	4	0	0	-2	4	-2				
						3	0	0	1	5	1	0	0	0	1								3	1	5	0	0	1	-2	1				

Expandiertes transponiertes Wägeschema

\mathbf{x}_e^T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Expandierte Normalmatrix

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$(\mathbf{x}^T \mathbf{x})_e$		$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$					$\mathbf{D}^T \mathbf{D}$										\mathbf{x}_1^T
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1	$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$	1	2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
2		2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3		3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4		4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5		5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	$\mathbf{D}^T \mathbf{D}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
7		2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
8		3	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	-1	0	0	0
9		4	0	0	0	0	0	0	-2	4	-2	0	0	0	-1	0	0
10		5	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	-1	0
11		1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12		2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
13		3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
14		4	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
15		5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
16	\mathbf{x}_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lösungsmatrix

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1
2	-1/2	1	-1/2	0	7/4	-1/2	-3/4	-1/2	0	0	1/2	-1	...	1
3	1	0	0	0	-1/2	1	1/2	0	0	0	0	0	...	-1
4	1/2	0	1/2	0	-3/4	1/2	3/4	1/2	0	0	-1/2	1	...	-1
5	0	0	1	0	-1/2	0	1/2	1	0	0	0	0	...	-1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	...	-1
7	-1/2	1	-1/2	0	7/4	-1/2	-3/4	-1/2	0	-1	1/2	-1	...	-1
8	1	0	0	0	-1/2	1	1/2	0	0	0	-1/1	0	...	-1
9	0,5	0	1/2	0	-3/4	1/2	3/4	1/2	0	0	-1/2	0	...	-1
10	0	0	1	0	-1/2	0	1/2	1	0	0	0	0	...	-1
11	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	-1
12	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	...	-1
13	0	0	0	0	1/2	-1	-1/2	0	0	0	0	0	...	-1
14	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	...	-1

Ganzzahlige Darstellung

N		d	i												...
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
j	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	2	-4	-2	4	-2	0	7	-2	-3	-2	0	0	2	-4	...
i	1	4	2	0	0	0	-1	2	1	0	0	0	0	0	...
	2	10	2	0	2	0	-3	2	3	2	0	0	-2	4	...
	3	4	0	0	2	0	-1	0	1	2	0	0	0	0	...
	4	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	...
	5	-6	-2	4	-2	0	7	-2	-3	-2	0	-4	2	-4	...
	6	2	2	0	0	0	-1	2	1	0	0	0	-2	0	...
	7	6	2	0	2	0	-3	2	3	2	0	0	-2	0	...
	8	4	0	0	2	0	-1	0	1	2	0	0	0	0	...
	9	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	10	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	...
	11	-2	0	0	0	0	1	-2	-1	0	0	0	0	0	...
	12	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	...

9.2.2 Durchgehend lineares Driftmodell

Alternierender Lastwechsel, Wägeschema N P N P N P N P N P, 2 Objekte und 12 Wägewerte, Luftdichte $\rho_a = 0$

Erweiterte Wägematrix

x		j		i											
		1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Transponierte Wägematrix

x^T		i											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
j	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Normalisierte Wägematrix

$x^T x$		1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	6	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	2	0	6	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Driftmatrix

D		j		i											
		1	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k	1	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1

Transponierte Driftmatrix

D^T		k									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Normalisierte Driftmatrix

$D^T D$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	-2	5	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	5	-2
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1

Expandiertes transponiertes Wägeschema

\mathbf{x}_e^T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Expandierte Normalmatrix

		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
$(X^T X)_e$		$X^T X$														$D^T D$																												x_1^T																																																																																																																																																																																																																																																													
		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	1 2 3

Lösungsmatrix

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	41
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1
2	- 3/34	27/136	- 25/136	23/136	- 25/136	3/17	- 3/17	25/136	- 23/136	25/136	- 27/136	3/34	...	1
3	1678/2125	4119/17000	139/1700	- 653/8500	49/8500	- 41/680	3/85	- 727/17000	347/8500	- 71/1700	397/8500	- 351/17000	...	-1
4	5619/17000	5339/17000	1113/3400	89/17000	819/8500	- 33/340	49/680	- 1587/17000	1339/17000	- 297/3400	807/8500	- 353/8500	...	-1
5	139/1700	61/425	167/340	279/1700	77/425	- 5/68	5/68	- 43/425	129/1700	- 31/340	41/425	- 71/1700	...	-1
6	97/8500	- 411/17000	1183/3400	5139/17000	5813/17000	- 3/340	37/340	- 1937/17000	1389/17000	- 367/3400	1839/17000	- 403/8500	...	-1
7	49/8500	- 1487/17000	77/425	336/2125	4073/8500	103/680	59/340	- 1329/17000	297/4250	- 43/425	769/8500	- 727/17000	...	-1
8	19/680	- 81/680	15/136	- 1/680	57/170	5/17	45/136	- 7/680	69/680	- 15/136	8/85	- 9/170	...	-1
9	3/85	- 71/680	5/68	- 23/340	59/340	21/136	8/17	103/680	57/340	- 5/68	27/340	- 41/680	...	-1
10	773/17000	- 1837/17000	281/3400	- 1687/17000	449/4250	- 1/340	223/680	5021/17000	5563/17000	- 9/3400	236/2125	- 701/8500	...	-1
11	347/8500	- 192/2125	129/1700	- 743/8500	297/4250	- 23/340	57/340	336/2125	4007/8500	279/1700	741/4250	- 653/8500	...	-1
12	79/1700	- 347/3400	63/680	- 317/3400	281/3400	- 7/68	7/68	- 9/3400	1133/3400	209/680	1163/3400	- 11/1700	...	-1
13	397/8500	- 1761/17000	41/425	- 192/2125	769/8500	- 71/680	27/340	- 1487/17000	741/4250	61/425	4357/8500	4119/17000	...	-1
14	1149/17000	- 2581/17000	483/3400	- 2181/17000	1199/8500	- 12/85	79/680	- 3027/17000	1569/17000	- 347/3400	3747/8500	2981/4250	...	-1

Ganzzahl-Darstellung

N	i													...
	d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	136	-12	27	-25	23	-25	24	-24	25	-23	25	-27	12	...
1	17000	13424	4119	1390	-1306	98	-1025	600	-727	694	-710	794	-351	...
2	17000	5619	5339	5565	89	1638	-1650	1225	-1587	1339	-1485	1614	-706	...
3	1700	139	244	835	279	308	-125	125	-172	129	-155	164	-71	...
4	17000	194	-411	5915	5139	5813	-150	1850	-1937	1389	-1835	1839	-806	...
5	17000	98	-1487	3080	2688	8146	2575	2950	-1329	1188	-1720	1538	-727	...
6	680	19	-81	75	-1	228	200	225	-7	69	-75	64	-36	...
7	680	24	-71	50	-46	118	105	320	103	114	-50	54	-41	...
8	17000	773	-1837	1405	-1687	1796	-50	5575	5021	5563	-45	1888	-1402	...
9	8500	347	-768	645	-743	594	-575	1425	1344	4007	1395	1482	-653	...
10	3400	158	-347	315	-317	281	-350	350	-9	1133	1045	1163	-22	...
11	17000	794	-1761	1640	-1536	1538	-1775	1350	-1487	2964	2440	8714	4119	...
12	17000	1149	-2581	2415	-2181	2398	-2400	1975	-3027	1569	-1735	7494	11924	...

9.3 Beispiele zu den konventionellen Substitutionsmethoden

9.3.1 Einfachsubstitution mit aneinander anschließenden Zyklen bei 2 Objekten

Berechnung der besten Gewichtung

Zyklen N P N Wägewertdifferenz

$$\Delta Y = Y_2 - \frac{1}{2}(Y_1 + Y_3)$$

Zykluselement

$$-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}$$

Wägereihe N P N P N, 2 Zyklen

Driftmatrix

\mathbf{x}_d	i					
		1	2	3	4	5
j	1	-1	2	-1	0	0
	2	0	0	-1	2	-1

Zyklusmatrix

\mathbf{x}_z	i					
		1	2	3	4	5
j	1	-1/2	1	-1/2	0	0
	2	0	0	-1/2	1	-1/2

Expandierte normalisierte transponierte Zyklusmatrix

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$	j				
		1	2	3	
j	1	3/2	1/4	1	
	2	1/4	3/2	1	
	3	1	1	0	

Zyklusmatrixinverse

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e^{-1}$	j				
		1	2	3	
j	1	2/5	-2/5	1/2	
	2	-2/5	2/5	1/2	
	3	1/2	1/2	-7/8	

Gewichtungsvektor

j	w_{ze}
1	1/2
2	1/2
λ	3
	-7/8

Lösungsvektor

\mathbf{h}_z^T	i						
		1	2	3	4	5	
		-1/4	1/2	-1/2	1/2	-1/4	

Wägereihe N P N P N P N, 3 Zyklen

\mathbf{x}_d	i							
		1	2	3	4	5	6	7
j	1	1	-2	1	0	0	0	0
	2	0	0	1	-2	1	0	0
	3	0	0	0	0	1	-2	1

\mathbf{x}_z	i							
		1	2	3	4	5	6	7
j	1	-1/2	1	-1/2	0	0	0	0
	2	0	0	-1/2	1	-1/2	0	0
	3	0	0	0	0	-1/2	1	-1/2

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$	j					
		1	2	3	4	
j	1	3/2	1/4	0	1	
	2	1/4	3/2	1/4	1	
	3	0	1/4	3/2	1	
	4	1	1	1	0	

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e^{-1}$	j					
		1	2	3	4	
j	1	10/21	-2/7	-4/21	5/14	
	2	-2/7	4/7	-2/7	2/7	
	3	-4/21	-2/7	10/21	5/14	
	4	5/14	2/7	5/14	-17/28	

j	w_{ze}
1	5/14
2	2/7
3	5/14
λ	4
	-17/28

\mathbf{h}_z^T	i							
		1	2	3	4	5	6	7
		2/21	-4/21	5/21	-2/7	-2/21	10/21	-5/21

Wägereihe N P N P N P N P N, 4 Zyklen

Driftmatrix

\mathbf{x}_d	j	i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1

Zyklusmatrix

\mathbf{x}_z	j	i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	- 1/2	1	- 1/2	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	- 1/2	1	- 1/2	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	- 1/2	1	- 1/2	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	- 1/2	1	- 1/2

Expandierte normalisierte transponierte Zyklusmatrix

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$		j				
		1	2	3	4	5
j	1	3/2	1/4	0	0	1
	2	1/4	3/2	1/4	0	1
	3	0	1/4	3/2	1/4	1
	4	0	0	1/4	3/2	1
	5	1	1	1	1	0

Zyklusmatrixinverse

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e^{-1}$		j				
		1	2	3	4	5
j	1	168/319	- 80/319	- 36/319	- 52/319	3/11
	2	- 80/319	190/319	- 74/319	- 36/319	5/22
	3	- 36/319	- 74/319	190/319	- 80/319	5/22
	4	- 52/319	- 36/319	- 80/319	168/319	3/11
	5	3/11	5/22	5/22	3/11	- 41/88

Gewichtungsvektor

j	\mathbf{w}_{ze}
1	3/11
2	5/22
3	5/22
4	3/11
λ	-41/88

Lösungsvektor

\mathbf{h}_z^T	j	i								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		- 3/22	3/11	- 1/4	5/22	- 5/22	5/22	- 1/4	3/11	- 3/22

Wägereihe N P N P N P N P N, 5 Zyklen

Driftmatrix

\mathbf{x}_d	j	i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
j	1	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1

Zyklusmatrix

\mathbf{x}_z	j	i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
j	1	- 1/2	1	- 1/2	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	- 1/2	1	- 1/2	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	- 1/2	1	- 1/2	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	- 1/2	1	- 1/2	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1/2	1	- 1/2

Expandierte normalisierte transponierte Zyklusmatrix

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$		j					
		1	2	3	4	5	6
j	1	3/2	1/4	0	0	0	1
	2	1/4	3/2	1/4	0	0	1
	3	0	1/4	3/2	1/4	0	1
	4	0	0	1/4	3/2	1/4	1
	5	0	0	0	1/4	3/2	1
	6	1	1	1	1	1	0

Zyklusmatrixinverse

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e^{-1}$		j					
		1	2	3	4	5	6
j	1	2552/4585	1032/4585	- 12/131	- 508/4585	- 592/4585	29/131
	2	-1032/4585	2832/4585	- 28/131	- 312/4585	- 508/4585	24/131
	3	- 12/131	- 28/131	80/131	- 28/131	- 12/131	25/131
	4	- 508/4585	- 312/4585	- 28/131	2832/4585	-1032/4585	24/131
	5	- 592/4585	- 508/4585	- 12/131	-1032/4585	2552/4585	29/131
	6	29/131	24/131	25/131	24/131	29/131	- 99/262

Gewichtungsvektor

j	w_{ze}
1	29/131
2	24/131
3	25/131
4	24/131
5	29/131
λ	- 99/262

Lösungsvektor

\mathbf{h}_z^T	i										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\mathbf{h}_z^T	- 29/262	29/131	- 53/262	24/131	- 49/262	25/131	- 49/262	24/131	- 53/262	29/131	- 29/262

9.3.2 Kombinierte Substitution mit aneinander anschließenden Zyklen

Berechnung der besten Gewichtung von zwei Zyklen

Wägereihe N P P N N P

Zyklen	Wägewertdifferenzen	Zykluselemente
N P P	$\Delta Y = -Y_1 + 2Y_2 - Y_3$	-1 +2 -1
P N N P	$\Delta Y = \frac{1}{2}(Y_3 + Y_6) - \frac{1}{2}(Y_4 + Y_5)$	$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

Driftmatrix

$\mathbf{X_d}$		i					
		1	2	3	4	5	6
j	1	-1	2	-1	0	0	0
	2	0	0	-1	2	-1	0
	3	0	0	0	-1	2	-1

Zyklusmatrix

$\mathbf{X_z}$		i					
		1	2	3	4	5	6
j	1	-1	2	-1	0	0	0
	2	0	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2

Expandierte normalisierte transponierte Zyklusmatrix

$(\mathbf{X_z X_z^T})_e$		j		
		1	2	3
j	1	6	-1/2	1
	2	-1/2	1	1
	3	1	1	0

Zyklusmatrixinverse

$(\mathbf{X_z X_z^T})_e^{-1}$		j		
		1	2	3
j	1	1/8	-1/8	3/16
	2	-1/8	1/8	13/16
	3	3/16	13/16	-23/32

Gewichtungsvektor

j	$\mathbf{w_{ze}}$
1	3/16
2	13/16
λ	-23/32

Lösungsvektor

		i					
		1	2	3	4	5	6
$\mathbf{h_z^T}$		-3/16	3/8	7/32	-13/32	-13/32	13/32

Wägereihe N P P N N P P

Zyklen	Wägewertdifferenzen	Zykluselemente
N P P	$\Delta Y = -Y_1 + 2Y_2 - Y_3$	-1 +2 -1
P N N	$\Delta Y = Y_3 - 2Y_4 + Y_5$	1 -2 1
N P P	$\Delta Y = -Y_5 + 2Y_6 - Y_7$	-1 +2 -1

Driftmatrix

\mathbf{x}_d	j	i						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	-1	2	-1	0	0	0	0
	2	0	0	-1	2	-1	0	0
	3	0	0	0	0	-1	2	-1

Zyklusmatrix

\mathbf{x}_z	j	i						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	-1	2	-1	0	0	0	0
	2	0	0	1	-2	1	0	0
	3	0	0	0	0	-1	2	-1

Expandierte normalisierte transponierte Zyklusmatrix

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e$	j	i			
		1	2	3	4
	1	6	-1	0	1
	2	-1	6	-1	1
	3	0	-1	6	1
	4	1	1	1	0

Zyklusmatrixinverse

$(\mathbf{x}_z \mathbf{x}_z^T)_e^{-1}$	j	i			λ
		1	2	3	
	1	7/66	-1/22	-2/33	7/22
	2	-1/22	1/11	-1/22	4/11
	3	-2/33	-1/22	7/66	7/22
	4	7/22	4/11	7/22	-17/11

Gewichtungsvektor

j	\mathbf{w}_{ze}
1	7/22
2	0,36364
3	7/22
λ	-17/11

Lösungsvektor

\mathbf{h}_z^T	i							
		1	2	3	4	5	6	7
		-7/22	7/11	1/22	-8/11	1/22	7/11	-7/22

Literatur

- [1] Kochsiek, M.(Hrsg.): Handbuch des Wägens, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1989
- [2] Mettler-Toledo: Grundlagen der Massebestimmung, Mettler-Toledo AG, Greifensee 1991
- [3] Gläser, M.: Hinweise für die Kalibrierung von Massenormalen, PTB-MA-31, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1994
- [4] Balhorn, R., Buer, B., Gläser, M., Kochsiek, M.: Massebestimmung, Teil1: Weitergabe der Masseinheit – Waagen, Gewichtstücke und Prüfräume, PTB-MA-24, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1992
- [5] Lira, I.: Evaluation of cycles of comparison measurements by a least-squares method, Meas. Sci. Technol. **12** (2001) 1167-1171
- [6] Gläser, M.: Cycles of comparison measurements, uncertainties and efficiencies, Meas. Sci. Technol. **11** (2000) 20-24
- [7] Sutton, C.M., Clarkson, M.T.: A general Approach to Comparisons in the Presence of Drift, Metrologia 1993/94, **30**, 487-493
- [8] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, first edition, 1993, corrected and reprinted 1995, International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland)
- [9] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. Auflage, 1999
- [10] Helms, A.: Ambient Conditions in Mass Metrology, How much Control is Necessary?, HMD 18th Metrology Symposium, Cavtat, 2001
- [11] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin, 5. neubearb. Aufl., 1984
- [12] Schwartz, R.: Darstellung der Massescale der PTB von 1 mg bis 10 kg, PTB-MA-21, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1991
- [13] Brandt, S.: Statistische Methoden der Datenanalyse, Bibliographisches Institut 816/816a, Mannheim, 1968
- [14] Schwartz, R.: Guide to mass determination with high accuracy, PTB-MA-40, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1995
- [15] Kowalsky, H.-J., Michler, G.: Lineare Algebra, de Gruyter Lehrbuch, 12. Aufl. 2003
- [16] Georgii, H.-O.: Stochastik, de Gruyter Lehrbuch, 2002
- [17] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie, de Gruyter Lehrbuch, 5. Auflage, 2002
- [18] Cox, M.G., Harris, P.M.: Measurement Uncertainty and the Propagation of Distributions, Metrologie, Metrologie 2001, 10th International Metrology Congress, Saint-Louis, France, 2001
- [19] Myklebust, T., Källgren, H., Lau, P., Nielsen, L., Riski, K.: Testing of Weights: Part 1 – Calibration and surface roughness, OIML bulletin, volume XXXVIII, number 2, April 1997
- [20] Myklebust, T., Källgren, H., Lau, P., Nielsen, L., Riski, K.: Testing of Weights: Part 3 – Magnetism and convection, OIML bulletin, volume XXXVIII, 5-10, 1997
- [21] Davis, R.S.: Determining the Magnetic Properties of 1 kg Mass Standards, J. Res. Natl. Inst. Stands. Technol., USA, **100**, 209 – 25, January 1995
- [22] Bich, W., Cox, M.G., Harris, P.M.: Uncertainty modelling in mass comparisons, Metrologia **30**, 495, 1993/4
- [23] Bich W.: Covariances and restraints in mass metrology, Metrologia **27**, 111-116 , 1990
- [24] Cameron, J.M., Croarkin, M.C., Raybold, R.C.: Designs for the Calibration of Standards of Mass, Nat. Bur. Stand. (U.S.), Tech. Note **952**, 1977
- [25] Grabe, M.: Masseanschluß- Optimierung und Fehlerausbreitung, PTB-Mitt. **87**, 223-227, 1977
- [26] Grabe, M.: Note on the Application of the Method of Least Squares, Metrologia **14**, 143-146, 1978
- [27] Prowse, D.B., Anderson, A.R.: Calibration of a Set of Masses in Terms of One Mass Standard, Metrologia **10**, 123-128, 1974
- [28] Schwartz, R.: Untersuchung des Sorptionseinflusses bei Massebestimmung hoher Genauigkeit durch Wägung und durch Ellipsometrie unter kontrollierten Umgebungsbedingungen, PTB-Bericht MA-29, Braunschweig, 1993
- [29] Kochsiek, M., Gläser, M.: Massebestimmung, VCH, Weinheim, 1997
- [30] Schwartz, R.: Massebestimmung mit Waagen, Kapitel 3.4 in: Kochsiek, M., Gläser, M.: Massebestimmung, VCH, Weinheim, 1997
- [31] Prowse, D.B.: Measurement of Air Density for High Accuracy Mass Determination, in: Taylor, B.N., Phillips, W.D. (Eds): Precision Measurement and Fundamental Constants II. Nat. Bur. Stand. (U.S.), Spec. Publ. 617, 1984
- [32] Bich, W.: Bias and Optimal Linear Estimation in Comparison Calibrations, Metrologia 29, 15-22, 1992

- [33] International Recommendation OIML R 111-1 Edition 2004 (E): Weights of classes E_1 , E_2 , F_1 , F_2 , M_1 , M_{1-2} , M_2 , M_{2-3} and M_3
- [34] International Recommendation OIML R 76-1: Nonautomatic weighing instruments, Part 1: Metrological and technical requirements – Tests, OIML, Paris, 1992
- [35] Ach, K.-H.: Einfluss der Luftdichte auf die Anzeige von Waagen mit elektromagnetischer Kraftkompensation, *wägen+dosieren* 3/1980
- [36] Helms, A.: Traceability for weights, OIML bulletin, volume XXXV, number 3, July 1884
- [37] Zurmühl, R.: Statistik und Ausgleichsrechnung, IV. Kapitel in: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, Springer-Verlag, Berlin, 5. neubearb. Aufl., 1984
- [38] Gläser, M., Do, J.Y.: Effect of Free Convection on the Apparent Mass of 1 kg Mass Standards. *Metrologia* **30**, 67-73, 1993
- [39] Kempthorne, O.: *The Design and Analysis of Experiments*, John Wiley, New York, 1952
- [40] Balhorn, R., Probst, R., Schwartz, R.: *Untersuchung der Effizienz von Wägeschemata*, PTB-Jahresbericht, 1985
- [41] Schwartz, R.: Eine 10-kg-Komparatorwaage mit rechnergesteuerter Wechsellvorrichtung, *PTB-Mitt.* **98**, 247-252, 1988
- [42] Gläser, M.: Uncertainty and efficiency of correlated measurement cycles with periodically varying patterns, *Meas. Sci. Technol.* **14** (2003) 433-438
- [43] Cameron, J.M., Hailes, G.E.: Designs for the Calibration of Small Groups of Standards in the Presence of Drift, *Nat. Bur. Stand. (U.S.), Tech. Note* **844**, 1974